BEITRAG

ZUR

THEORIE DER BIEGUNG

KRUMMER OBERFLÄCHEN.

INAUGURAL-DISSERTATION

VERFASST UND DER

HOHEN PHILOSOPHISCHEN FACULTÄT DER ALBERT-LUDWIGS-UNIVERSITÄT ZU FREIBURG

ZUR

ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

VORGELEGT VON

JOHANNES KOHL.

ACAD. LUGD. BAT. BIBL.

STRASSBURG,
BUCHDRUCKEREI VON R. SCHULTZ & COMP.
(BERGER-LEVRAULT'S Nachf.).
1880.

EINLEITUNG.

Die vorliegende Abhandlung ist die Umarbeitung der mir von Herrn Prof. Dr. Christoffel gestellten Prüfungsarbeit:

«Das Linienelement einer Oberfläche S_0 ist in der allgemeinen Form:

$$\sqrt{edp^2 + 2fdpdq + gdq^2}$$

gegeben; die vollständigen Bedingungen zu ermitteln, aus denen sich alle diejenigen Oberflächen S ergeben, die aus S_0 durch Biegung ohne Dehnung entstehen können.»

Als Richtschnur diente mir hierbei die in der Vorlesung «Ausgewählte Kapitel aus der Infinitesimalgeometrie» durch Herrn Prof. Dr. Christoffel gegebene Behandlung desselben Problems, jedoch unter der besonderen Voraussetzung, dass die gegebene Oberfläche S_0 sich auf einer Ebene abbilden lasse, d. h. dass das Linienelement unter der Form

$$m\,(dp^2 + dq^2),$$

die Normalform des Linienelementes genannt, gegeben sei.

Was die Geschichte des obigen Problems angeht, so findet dasselbe, wie auch die Betrachtungen des § 1, seinen Ursprung in Gauss. Es ist die Abhandlung betitelt: «*Disquisitiones generales circa superficies curvas,*» in welcher Gauss auf die Wichtigkeit dieses Problems als der Grundlage für eine neue Behandlungsweise der Geometrie aufmerksam macht mit den Worten:

Quæ in articulo præcedenti exposuimus (nämlich die Andeutung des erwähnten Problems) *cohaerent cum modo peculiari superficies considerandi, summopere digno, qui a geometris excolatur.*

Unter den Abhandlungen, die sich auf diesen von Gauss angeregten Gegenstand erstrecken, mögen die folgenden als die wichtigsten hervorgehoben werden:

Bour: «*Théorie de la déformation des surfaces*[1].»

Minding: «Wie sich entscheiden lässt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaasse[2].»

Bonnet: «*Mémoire sur la théorie des surfaces, applicables sur une surface donnée*[3].»

Auf die Resultate dieser Untersuchungen näher einzugehen, würde zu weit führen und dem Zwecke der vorliegenden Arbeit keineswegs entsprechen. Einige allgemeine Bemerkungen über dieselben mögen genügen.

Diese Abhandlungen verfolgen theils das Ziel, die im § 1 erwähnten drei Hauptbedingungen des Biegungsproblems so umzuformen, dass man sie in geometrischer Form aussprechen kann, theils beziehen sie sich auf spezielle Arten von Oberflächen oder behandeln sonst spezielle Probleme, untersuchen z. B. gewisse ausgezeichnete Linien in Bezug auf ihr Verhalten bei der Biegung, zu welchem Zwecke meistens ein ganz spezielles Coordinatensystem auf der Fläche zu Grunde gelegt wird.

Unsere Hauptaufgabe hingegen soll sein, die drei partiellen Differentialgleichungen 2. Grades, von denen im § 1 die Rede sein wird, in andere von einfacherer Natur überzuführen, und zwar dadurch, dass wir dieselben durch lineare partielle Differentialgleichungen ersetzen.

Der bereits erwähnten Literatur müssen wir nothwendigerweise noch eine vor etwa 10 Jahren erschienene Abhandlung, betitelt: «Untersuchungen über einige Punkte aus der allgemeinen Theorie der Flächen[4]» von Herrn Prof. Dr. Enneper zu Göttingen, hinzufügen. Es ist diese Abhandlung um so be-

---

1. *Journal d'école polytechnique*, Bd. 22.
2. *Crelle's Journal*, Bd. 19.
3. *Journal d'école polytechnique*, Bd. 24 u. Bd. 25. Die Bonnet'sche Abhandlung stimmt in ihrem I. Theil (Bd. 24) wesentlich mit der Minding'schen überein, worauf Bonnet (l. c. pag. 230) selbst aufmerksam macht.
4. Mathematische Annalen, Bd. 2.

deutsamer (vorzugsweise der 1. Abschnitt) für uns, weil sie, ohne mit uns dasselbe Ziel anzustreben, die wichtigsten der von uns abgeleiteten Formeln, wenn auch in anderer Gestalt, enthält, eine Bemerkung, zu der mich Herr Prof. Dr. Lindemann geleitet, der mich daher zu grossem Danke verpflichtet.

An den betreffenden Stellen werde ich mir erlauben, falls die Rechnungen nicht zu viel Raum in Anspruch nehmen, die Identität der Enneper'schen Formeln und der hier abgeleiteten anmerkungsweise nachzuweisen.

Es sei mir an dieser Stelle vergönnt, meinem sehr verehrten Lehrer, Herrn Prof. Dr. Christoffel, welcher mir das vorliegende Problem, freilich anfangs zu einem andern Zwecke, zur Behandlung übergab, meinen aufrichtigsten Dank auszusprechen.

Kurze Inhaltsangabe[1].

§ 1) Die Oberfläche S_0 ist gegeben durch die Gleichungen

$$x = \varphi(p,q);\ y = \psi(p,q);\ z = \chi(p,q);$$

mit Hülfe derselben lautet der allgemeine Ausdruck für das Linienelement der Fläche S_0:

$$ds = \sqrt{edp^2 + 2fdpdq + gdq^2};$$

für die Fläche S_1 ist: $ds_1 = \sqrt{e_1dp^2 + 2f_1dpdq + g_1dq^2};$

nothwendige Bedingungen, damit die gegebene Oberfläche S_0 sich in eine Oberfläche S_1 ohne Dehnung umbiegen lasse:

$$e = e_1;\ f = f_1;\ g = g_1.$$

Zurückführung der Lösung des vorliegenden Problems auf die successive Integration verschiedener Systeme linearer partieller Diff.-Gleichungen.

§ 2) Ableitung von Ausdrücken in e, f, g und deren Derivirten für die zweiten totalen Differentiale von x, y, z, woraus sich sofort Ausdrücke für die partiellen zweiten Differentiale von x, y, z ergeben:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} &= E_1\frac{\partial x}{\partial p} + E_2\frac{\partial x}{\partial q} + E\xi \\ \frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q} &= F_1\frac{\partial x}{\partial p} + F_2\frac{\partial x}{\partial q} + F\xi; \\ \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} &= G_1\frac{\partial x}{\partial p} + G_2\frac{\partial x}{\partial q} + G\xi; \end{aligned}\right\} \text{Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für } \frac{\partial^2 z}{\partial p^2} \text{ etc.}$$

worin E_1, F_1, G_1 etc. nur die Grössen e, f, g und deren ersten partiellen Derivirten nach p und q enthalten, und ξ, als Richtungs-

1. Die hierin erwähnten Gleichungen tragen dieselben Nummern wie in der Abhandlung selbst.

cosinus einer Normalen zur gesuchten Oberfläche in der Richtung der positiven x = Axe, noch unbekannt ist, sowie die Grössen E, F, G. Ableitung einiger für die spätere Untersuchung nothwendigen Formeln.

§ 3) Ableitung von Ausdrücken für die totalen und partiellen Derivirten von ξ, η, ζ in den entsprechenden Derivirten von x, y, z auf Grund einer geometrischen Betrachtung; aus diesen Ausdrücken ergeben sich folgende für dx, dy, dz:

$$dx = (\mathfrak{A}_\xi f - \mathfrak{B}_\xi e)\,dp + (\mathfrak{A}_\xi g - \mathfrak{B}_\xi f)\,dq$$

V$_b$. wo: $\mathfrak{A}_\xi = \dfrac{F\frac{\partial\xi}{\partial p} - E\frac{\partial\xi}{\partial q}}{EG - F^2}$; $\mathfrak{B}_\xi = \dfrac{G\frac{\partial\xi}{\partial p} - F\frac{\partial\xi}{\partial q}}{EG - F^2}$;

etc.

ferner für $\dfrac{\partial x}{\partial p}$ und $\dfrac{\partial x}{\partial q}$: $\dfrac{\partial x}{\partial p} = \mathfrak{A}_\xi f - \mathfrak{B}_\xi e$;

$$\frac{\partial x}{\partial q} = \mathfrak{A}_\xi g - \mathfrak{B}_\xi f.$$

§ 4) Auf Grund dieser letzten Ausdrücke für $\dfrac{\partial x}{\partial p}$, $\dfrac{\partial x}{\partial q}$ werden die in § 2 erwähnten Formeln in folgende umgeformt:

$$\left.\begin{aligned} &1)\ \frac{\partial}{\partial p}(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi) = E_1(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi) + E_2(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) + E\xi;\\ &2)\ \frac{\partial}{\partial q}(\quad\text{»}\quad) = F_1(\quad\text{»}\quad) + F_2(\quad\text{»}\quad) + F\xi;\end{aligned}\right\}\ \mathbf{VI_a}$$

$$\left.\begin{aligned} &3)\ \frac{\partial}{\partial q}(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) = G_1(\quad\text{»}\quad) + G_2(\quad\text{»}\quad) + G\xi;\\ &4)\ \frac{\partial}{\partial p}(\quad\text{»}\quad) = F_1(\quad\text{»}\quad) + F_2(\quad\text{»}\quad) + F\xi.\end{aligned}\right\}\ \mathbf{VI_b}$$

Die Gleichungen 2 und 4 liefern die Integrabilitätsbedingung zur Gleichung V$_b$.

Ableitung von Differentialgleichungen für die bis jetzt noch unbekannten Grössen E, F, G, welche sich einfach als Integrabilitätsbedingungen zu den Gleichungen VI$_a$ und VI$_b$ ergeben:

$$1)\quad \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}(E_1 + F_2) + \frac{1}{2}E_1\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{1}{2}F_1\frac{\partial e}{\partial q} + E_1\frac{\partial J}{\partial q} + EG - F^2 = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} 2)\quad & \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{\partial E}{\partial q} + EF_1 - FE_1 - GE_2 + FF_2 = 0; \\ 3)\quad & \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p} + GF_2 - FG_2 - EG_1 + FF_1 = 0. \end{aligned}\right\} \text{VII}$$

§ 5) Schlussresultat: Durch successive Integration der Differentialgleichungen VII, VI_a und VI_b, V_b gelangt man zu Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi_1(p,q);\ y = \psi_1(p,q);\ z = \chi_1(p,q),$$

welche eine aus S_0 durch Biegung ohne Dehnung abgeleitete Oberfläche S_1 repräsentiren.

§ 6) Bedeutung der Gleichungen VII:

Die 1. hat eine Eigenschaft, die invariant ist; sie enthält den Gauss'schen Satz über das Krümmungsmaass. Die beiden andern sind nichts anderes als Integrabilitätsbedingungen.

§ 7) Bedeutung der Hülfsgrössen E, F, G, aufgefunden durch geometrische Betrachtung:

$$E = e\left\{\frac{\cos^2\theta_1}{\rho_1} + \frac{\cos^2\theta_2}{\rho_2}\right\};$$

$$F = \sqrt{eg}\left\{\frac{\cos(\omega-\theta_1)\cos\theta_1}{\rho_1} + \frac{\cos(\omega-\theta_2)\cos\theta_2}{\rho_2}\right\};$$

$$G = g\left\{\frac{\cos^2(\omega-\theta_1)}{\rho_1} + \frac{\cos^2(\omega-\theta_2)}{\rho_2}\right\}.$$

§ 1. Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Linienelement.

Wenn auf einer Oberfläche S_0 ein Punkt o mit den Coordinaten x, y, z gegeben ist und wir lassen denselben sich unendlich wenig aus seiner Anfangslage entfernen, etwa bis zum Punkte o_1 hin, dessen Coordinaten $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ sind, so nennt man den Weg, welchen der Punkt o gemacht hat, ein Linienelement der Oberfläche S_0. Bezeichnen wir die Länge desselben mit ds, so ist bekanntlich:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2.$$

Denkt man sich nun andererseits, nach dem Vorgange von Gauss, einen Punkt auf der Fläche S_0 durch zwei krummlinige Coordinaten p, q bestimmt, und dann x, y, z als Funktionen derselben gegeben, so ist:

$$ds^2 = edp^2 + 2fdpdq + gdq^2$$

wo:

$$e = \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial p}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2; \quad \text{(zur Abkürzung)}$$

$$f = \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} + \frac{\partial y}{\partial p}\frac{\partial y}{\partial q} + \frac{\partial z}{\partial p}\frac{\partial z}{\partial q} = \Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q};$$

$$g = \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2 = \Sigma\left(\frac{\partial z}{\partial q}\right)^2.$$

Nehmen wir nun an, unsere Oberfläche S_0 sei gebildet aus einer biegsamen Substanz und lasse sich ohne Dehnung in eine andere Oberfläche S_1 umbiegen; dann wird den Punkten (x, y, z) und $(x + dx, y + dy, z + dz)$ der Oberfläche S_0 beziehungsweise ein Punkt (x_1, y_1, z_1) und ein Punkt $(x_1 + dx_1, y_1 + dy_1, z_1 + dz_1)$ der neuen Oberfläche S_1 entsprechen. Haben dann die Grössen ds_1, e_1, f_1, g_1 analoge Bedeutung, wie oben ds, e, f, g, so ist

$$ds_1^2 = dx_1^2 + dy_1^2 + dz_1^2 = e_1dp^2 + 2f_1dpdq + g_1dq^2.$$

Soll aber die so eben gemachte Bemerkung, dass bei der Biegung keine Dehnung stattfinde, erfüllt sein, so muss die Gleichung:

$$ds = ds_1 \text{ d. h.}$$

$$edp^2 + 2fdpdq + gdq^2 = e_1dp^2 + 2f_1dpdq + g_1dq^2$$

stattfinden. Dies wird jedoch nur dann möglich sein, wenn

$$e = e_1,$$
$$f = f_1,$$
$$g = g_1$$

ist.

Hierin liegen die nothwendigen Bedingungen dafür, dass die Oberfläche S_1 die Eigenschaft hat, aus der Oberfläche S_0 durch Biegung ohne Dehnung hervorgegangen zu sein.

Die passende Umformung dieser drei Gauss'schen Bedingungsgleichungen ist die Hauptaufgabe des Folgenden.

Wenn das Linienelement in der Form:

$$ds = \sqrt{edp^2 + 2fdpdq + gdq^2}$$

gegeben ist und es sollen die hierin als bekannt vorausgesetzten Grössen e, f, g nach dem obigen bei der Umbiegung dieselben bleiben, so ist die Lösung unseres Problems offenbar identisch mit der Auflösung der Gleichung:

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = edp^2 + 2fdpdq + gdq^2$$

nach x, y, z, wenn zu denselben die Bedingung hinzutritt, dass sie identisch sein soll in Bezug auf dp und dq, d. h. identisch mit der Auflösung der Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e &= \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2; \\ f &= \Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q}; \\ g &= \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2; \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{1}$$

nach x, y, z; wo das Summationszeichen (Σ) sich auf die pag. 9 angegebene Weise interpretiren lässt.

Diese 3 Gleichungen können als simultane partielle Differentialgleichungen vom zweiten Grade nach dem gegenwärtigen Stande der Integralrechnung nicht allgemein integrirt werden; wir müssen daher auf eine andere Weise die Darstellung der Grössen x, y, z als Funktionen von p und q zu bewirken suchen; dies möge dadurch geschehen, dass wir uns unter Zugrundelegung der durch die Gleichungen pag. 10 ausgedrückten Hauptbedingung unseres Problems verschiedene Systeme linearer partieller Differentialgleichungen herleiten, durch deren successive Integration wir die Integration der Gleichungen (1) ersetzen. Wir werden dadurch der allgemeinen Lösung insofern näher gekommen sein, als man annimmt, dass der Integration linearer Differentialgleichungen weniger Schwierigkeiten entgegenstehen.

---

§ 2. Untersuchung, betreffend die zweiten Derivirten d^2x, d^2y, d^2z.

Bei dem Wege, den wir zur Lösung unseres Problems einschlagen, ist es von fundamentaler Bedeutung, für die vollständigen zweiten Differentiale von x, y, z Ausdrücke zu kennen, die sich mit Hülfe der bekannten Grössen e, f, g berechnen lassen. Zu diesem Ziele mögen uns zwei Wege führen.

I. Weg:

Die Gleichungen (1) lauteten:

$$e = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2; \; f = \Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\cdot\frac{\partial x}{\partial q}; \; g = \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2.$$

Durch Differentiation dieser drei Gleichungen einmal nach p, dann nach q, erhalten wir die folgenden auch sonst vielfach benutzten 6 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p};\\
\Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q};\\
\Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} &= \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p};\\
\Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} &= \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q};\\
\Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p};\\
\Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} &= \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q}.
\end{aligned}\right\}$$

Aus ihnen ergeben sich, wie sofort einzusehen, folgende zwei Gleichungen:

$$\mathbf{2}\quad \left\{\begin{aligned}
\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d^2x &= \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p} dp^2 + \frac{\partial e}{\partial q} dpdq + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}\right) dq^2;\\
\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d^2x &= \left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}\right) dp^2 + \frac{\partial g}{\partial p} dpdq + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q} dq^2.
\end{aligned}\right.$$

Wir haben hierdurch zur Bestimmung der drei Unbekannten d^2x, d^2y, d^2z zwei Gleichungen erhalten. Zur Bestimmung der Werthe derselben bedürfen wir aber noch einer dritten Gleichung zwischen jenen Unbekannten. Dieselbe möge in folgender Form gegeben sein:

$$\mathbf{2^a}\quad \Sigma \xi d^2x = (\xi d^2x + \eta d^2y + \zeta d^2z) = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2,$$

wo ξ, η, ζ die Richtungscosinus der Normalen zur gesuchten Oberfläche im Punkte o bedeuten, als solche uns jedoch noch unbekannt sind, und E, F, G vorläufig nur als Hülfsgrössen gelten:

$$\Sigma\xi \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = E;\ \Sigma\xi \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} = F;\ \Sigma\xi \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = G.$$

Die Bedeutung derselben wird am Schlusse (§ 7) besprochen werden. Um die drei Gleichungen 2 und 2^a nach d^2x, d^2y, d^2z aufzulösen, werden drei neue Unbekannte A, B, C durch folgende Formeln eingeführt:

$$\left.\begin{aligned} d^2x &= A\frac{\partial x}{\partial p} + B\frac{\partial x}{\partial q} + C\xi; \\ d^2y &= A\frac{\partial y}{\partial p} + B\frac{\partial y}{\partial q} + C\eta; \\ d^2z &= A\frac{\partial z}{\partial p} + B\frac{\partial z}{\partial q} + C\zeta; \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{I}$$

und werden A, B, C sich in folgender Form ausdrücken:

$$\left.\begin{aligned} A &= E_1dp^2 + 2F_1dpdq + G_1dq^2; \\ B &= E_2dp^2 + 2F_2dpdq + G_2dq^2; \\ C &= Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq. \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{I}^a$$

Um die neuen Unbekannten an Stelle der früheren einzuführen, bemerken wir zunächst die Gleichungen:

$$\alpha)\ \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\beta)\ \xi dx + \eta dy + \zeta dz = 0 \text{ oder } \Sigma\xi dx = 0,$$

welche daraus folgen, dass ξ, η, ζ als die Richtungscosinus der Normalen und die Summe:

$$\xi dx + \eta dy + \zeta dz$$

als die Länge der Projektion eines vom Punkte o ausgehenden Linienelementes auf die Normale aufzufassen ist.

Wenn nun ferner p sich ändert und q constant bleibt, so ist:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial p}dp,$$

also:

$$\gamma_a)\ \Sigma\xi\frac{\partial x}{\partial p} = 0;$$

wenn dagegen q sich ändert und p constant bleibt, so ist:

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q}dq,$$

also:

$$\gamma_b)\ \Sigma\xi\frac{\partial x}{\partial q} = 0;$$

Multipliciren wir nach diesen Vorbereitungen die Gleichungen I

1) resp. mit $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p}$ und addiren,

2) » » $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$ » »

3) » » $\xi,\ \eta,\ \zeta$ » »

so erhalten wir unter Berücksichtigung der Formeln 1, α, β, γ die neuen Gleichungen:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d^2x = Ae + Bf;$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d^2x = Af + Bg;$$

$$\Sigma \xi d^2x = C.$$

Durch Auflösung der beiden ersten Gleichungen nach A und B finden wir:

$$A(eg - f^2) = g\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d^2x - f\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d^2x;$$

$$B(eg - f^2) = e\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d^2x - f\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d^2x;$$

Diese Gleichungen gehen unter Hinzuziehung der Gleichungen (2) in folgende über:

$$A(eg - f^2) = g\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p} dp^2 + \frac{\partial e}{\partial q} dpdq + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}\right) dq^2\right\} -$$

$$- f\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}\right) dp^2 + \frac{\partial g}{\partial p} dpdq + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q} dq^2\right\};$$

$$B(eg - f^2) = -f\left\{\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p} dp^2 + \frac{\partial e}{\partial q} dpdq + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}\right) dq^2\right\} +$$

$$+ e\left\{\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}\right) dp^2 + \frac{\partial g}{\partial p} dpdq + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q} dq^2\right\}.$$

Indem man die rechten Seiten nach dp^2, $dpdq$, dq^2 ordnet und zur Abkürzung setzt:

$$\mathbf{3}\quad \left\{\begin{aligned}
E_1(eg - f^2) &= \frac{1}{2} g \frac{\partial e}{\partial p} + \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial q} - f \frac{\partial f}{\partial p};\\
F_1(eg - f^2) &= \frac{1}{2} g \frac{\partial e}{\partial q} - \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial p};\\
G_1(eg - f^2) &= g \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2} g \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial q};\\
E_2(eg - f^2) &= e \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2} e \frac{\partial e}{\partial q} - \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial p};\\
F_2(eg - f^2) &= \frac{1}{2} e \frac{\partial g}{\partial p} - \frac{1}{2} f \frac{\partial e}{\partial q};\\
G^2(eg - f^2) &= \frac{1}{2} e \frac{\partial g}{\partial q} + \frac{1}{2} f \frac{\partial g}{\partial p} - f \frac{\partial f}{\partial q};
\end{aligned}\right.$$

erhält man:

$$A = E_1 dp^2 + 2F_1 dpdq + G_1 dq^2;$$
$$B = E_2 dp^2 + 2F_2 dpdq + G_2 dq^2;$$

und da wir fanden $\Sigma \xi d^2x = C$, so ist nach 2_a:

$$C = Edp^2 + 2Fdpdq + Gdq^2.$$

Dies in die Gleichungen I eingesetzt, liefert dann die gesuchten Ausdrücke für die 2. Differentiale von x, y, z.

II. Weg:

Ausgehend von der allgemeinen Form des Linienelementes:

$$ds^2 = edp^2 + 2fdpdq + gdq^2$$

suchen wir mit Hülfe der Variationsrechnung die Bedingung für die kürzeste Linie auf.

Wenn wir zwei Punkte A und E der Oberfläche mit einander verbinden und die Länge dieser Verbindungslinie l nennen, so lässt sich l durch ein bestimmtes Integral ausdrücken. Nehmen wir beispielsweise A als den Anfangspunkt und E als den Endpunkt jener Verbindungslinie, so ist:

$$l = \int_A^E ds.$$

Um nun die Bedingung aufzufinden, dass der Bogen l kürzeste Linie unserer Oberfläche sei, suchen wir die erste Variation δl des Bogens l.

Es ist:

$$2ds\delta ds = 2edp\delta dp + 2fdp\delta dq + 2fdq\delta dp + 2gdq\delta dq + \left(\frac{\partial e}{\partial p}\delta p + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial e}{\partial q}\delta q\right) dp^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial p}\delta p + \frac{\partial f}{\partial q}\delta q\right) 2dpdq + \left(\frac{\partial g}{\partial p}\delta p + \frac{\partial g}{\partial q}\delta q\right) dq^2;$$

Daraus folgt, wenn man durch $2ds$ dividirt und sich erinnert, dass $\delta dp = d\delta p$ ist:

$$\delta ds = e\frac{dp}{ds}d\delta p + f\frac{dp}{ds}d\delta q + f\frac{dq}{ds}d\delta p + g\frac{dq}{ds}d\delta q + \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial p}dp\delta p +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial q}dp\delta q + \frac{dp}{ds}\frac{\partial f}{\partial p}dq\delta p + \frac{dq}{ds}\frac{\partial f}{\partial p}dp\delta q + \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial p}dq\delta p +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial q}dq\delta q.$$

Für die erste Variation von l ergibt sich:

$$\delta l = \int_A^E d\delta s;$$

diese muss gleich Null sein, wenn l eine kürzeste oder allgemeiner eine geodätische Linie sein soll, d. h. es muss sein:

$$\int_A^E d\delta s = 0,$$

oder wenn wir hierin den oben für $d\delta s$ gefundenen Ausdruck, nach $d\delta p$, $d\delta q$, δp, δq geordnet, einführen, so lautet unsre Bedingungsgleichung:

$$0 = \int_A^E \left\{ \left(e\frac{dp}{ds} + f\frac{dq}{ds} \right) d\delta p + \left(f\frac{dp}{ds} + g\frac{dq}{ds} \right) d\delta q \right\} +$$

$$+ \int_A^E \left\{ \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial p}dp + \frac{dp}{ds}\frac{\partial f}{\partial p}dq + \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial p}dq \right\} \delta p +$$

$$+ \int_A^E \left\{ \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial q}dp + \frac{dq}{ds}\frac{\partial f}{\partial q}dp + \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial q}dq \right\} \delta q.$$

Durch theilweise Integration lässt sich das erste Integral unter der Berücksichtigung, dass ds das constant genommene Differential von s ist, in folgender Weise umformen:

$$\int_A^E \left\{ \left(e\frac{dp}{ds} + f\frac{dq}{ds} \right) d\delta p + \left(f\frac{dp}{ds} + g\frac{dq}{ds} \right) d\delta q \right\} =$$

$$= \left\{ \left(e\frac{dp}{ds} + f\frac{dq}{ds} \right) \delta p + \left(f\frac{dp}{ds} + g\frac{dq}{ds} \right) \delta q \right\}_A^E -$$

$$- \int_A^E \left\{ e\frac{d^2p}{ds} + \frac{dp}{ds}de + f\frac{d^2q}{ds} + \frac{dq}{ds}df \right\} \delta p -$$

$$- \int_A^E \left\{ f\frac{d^2p}{ds} + \frac{dp}{ds}df + g\frac{d^2q}{ds} + \frac{dq}{ds}dg \right\} \delta q.$$

Bei der Verschiebung des Bogens l sollen nun die Endpunkte A und E dieselben bleiben; demzufolge wird in diesen Punkten

$\delta p = \delta q = 0$ sein, d. h. in dem Ausdrucke links ist der vorgetretene Theil selbst gleich Null. Die obige Bedingungsgleichung geht daher unter passender Anordnung der Glieder in folgende über:

$$0 = \int_A^E \Big(e\frac{d^2p}{ds} + \frac{dp}{ds}de + f\frac{d^2q}{ds} + \frac{dq}{ds}df - \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial p}dp - \\ - \frac{dp}{ds}\frac{\partial f}{\partial p}dq - \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial p}dq\Big)\delta p + \int_A^E \Big(f\frac{d^2p}{ds} + \frac{dp}{ds}df + g\frac{d^2q}{ds} + \\ + \frac{dq}{ds}dq - \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial q}dp - \frac{dq}{ds}\frac{\partial f}{\partial q}dp - \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial q}dp\Big)\delta q.$$

Diese Gleichung ist gültig für jedes δp und δq; es kann somit derselben nur genügt werden, wenn die Coefficienten von δp und δq einzeln gleich Null sind:

$$0 = e\frac{d^2p}{ds} + \frac{dp}{ds}de + f\frac{d^2q}{ds} + \frac{dq}{ds}df - \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial p}dp - \frac{dp}{ds}\frac{\partial f}{\partial p}dq - \\ - \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial p}dq;$$

$$0 = f\frac{d^2p}{ds} + \frac{dp}{ds}df + g\frac{d^2q}{ds} + \frac{dq}{ds}dg - \frac{1}{2}\frac{dp}{ds}\frac{\partial e}{\partial q}dp - \frac{dq}{ds}\frac{\partial f}{\partial q}dp - \\ - \frac{1}{2}\frac{dq}{ds}\frac{\partial g}{\partial q}dq;$$

oder:

$$0 = ed^2p + dpde + fd^2q + dqdf - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p}dp^2 - \frac{\partial f}{\partial p}dpdq - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}dq^2;^1$$

$$0 = fd^2p + dpdf + gd^2q + dqdg - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}dp^2 - \frac{\partial f}{\partial q}dpdq - \\ - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q}dq^2.$$

---

1. Vergleiche hierzu «*Disquisitiones circa superf. curvas; art. XVIII,*» worin sich folgende Gleichung findet (was bei Gauss E, F, G ist hier e, f, g):

$$\frac{\partial e}{\partial p}dp^2 + \frac{2\partial f}{\partial p}dpdq + \frac{\partial g}{\partial p}dq^2 = 2ds \,.\, d\,\frac{edp + fdq}{ds}.$$

Es wird dieselbe, wie leicht zu erkennen, mit unsrer Gleichung vollständig übereinstimmen, wenn man nur den Ausdruck rechts ausrechnet und die Gleichung durch 2 dividirt.

Hieraus ergeben sich d^2p, d^2q als Ausdrücke von folgender Gestalt:

$$d^2p(eg-f^2)=f(dfdp+dgdq-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}dp^2-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q}dq^2-\frac{\partial f}{\partial q}dpdq)-$$

$$-g(dedp+dfdq-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p}dp^2-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}dq^2-\frac{\partial f}{\partial p}dpdq);$$

$$d^2q(eg-f^2)=f(dedp+dfdq-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p}dp^2-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}dq^2-\frac{\partial f}{\partial p}dpdq)-$$

$$-e(dfdp+dgdq-\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}dp^2-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q}dq^2-\frac{\partial f}{\partial q}dpdq);$$

oder:

$$d^2p\,(eg-f^2)=\left(f\frac{\partial f}{\partial p}-\frac{1}{2}f\frac{\partial e}{\partial q}-\frac{1}{2}g\frac{\partial e}{\partial p}\right)dp^2+$$

$$+2\left(\frac{1}{2}f\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{1}{2}g\frac{\partial e}{\partial q}\right)dpdq+\left(\frac{1}{2}g\frac{\partial g}{\partial p}+\frac{1}{2}f\frac{\partial g}{\partial q}-g\frac{\partial f}{\partial q}\right)dq^2;$$

$$d^2q\,(eg-f^2)=\left(\frac{1}{2}e\frac{\partial e}{\partial q}+\frac{1}{2}f\frac{\partial e}{\partial p}-e\frac{\partial f}{\partial p}\right)dp^2+$$

$$+2\left(\frac{1}{2}f\frac{\partial e}{\partial q}-\frac{1}{2}e\frac{\partial g}{\partial p}\right)dpdq+\left(f\frac{\partial f}{\partial q}-\frac{1}{2}f\frac{\partial g}{\partial p}-\frac{1}{2}e\frac{\partial g}{\partial q}\right)dq^2.$$

Kehren wir innerhalb der Klammern die Zeichen um und erinnern uns der (pag. 16) eingeführten Abkürzungen, so gehen diese Gleichungen in die sehr einfache Form über:

$d^2p = -(E_1dp^2+2F_1dpdq+G_1dq^2) = -A$ (nach Gl. I_a);
$d^2q = -(E_2dp^2+2F_2dpdq+G_2dq^2) = -B$ (»).

Nehmen wir nun an, die Bewegung des Punktes 0 (p,q) sei auf eine geodätische Linie beschränkt; dann treten die sonst von einander unabhängigen Variabeln p und q in ein gewisses Abhängigkeitsverhältniss, vermöge dessen die vollständigen ersten und zweiten Differentiale von x, y, z die folgenden Formen erhalten:

$$(\alpha)\ (dx)=\frac{\partial x}{\partial p}dp+\frac{\partial x}{\partial q}dq;$$

$$(\beta)\ (d^2x)=\frac{\partial^2x}{\partial p^2}dp^2+2\frac{\partial^2x}{\partial p\partial q}dpdq+\frac{\partial^2x}{\partial q^2}dq^2+\frac{\partial x}{\partial p}d^2p+\frac{\partial x}{\partial q}d^2q.$$

Ist hingegen die Bewegung des Punktes 0 an keine Schranken gebunden, dann erhalten wir für dx und d^2x offenbar die folgenden Ausdrücke:

(α_1) $dx = \frac{\partial x}{\partial p} dp + \frac{\partial x}{\partial q} dq =$ dem obigen (dx);

(β_1) $d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} dp^2 + 2 \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} dpdq + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} dq^2$, nicht $= (d^2x)$.

Verbinden wir die Gleichungen β und β_1 mit einander, so ergibt sich:

$$(d^2x) = d^2x + \frac{\partial x}{\partial p} d^2p + \frac{\partial x}{\partial q} d^2q;$$

oder:

$$(d^2x) = d^2x - A \frac{\partial x}{\partial p} - B \frac{\partial x}{\partial q}.$$

Hieraus:

$$d^2x = A \frac{\partial x}{\partial p} + B \frac{\partial x}{\partial q} + (d^2x).$$

In ähnlicher Weise finden wir:

$$d^2y = A \frac{\partial y}{\partial p} + B \frac{\partial y}{\partial q} + (d^2y);$$

$$d^2z = A \frac{\partial z}{\partial p} + B \frac{\partial z}{\partial q} + (d^2z).$$

Vergleichen wir diese Werthe von d^2x, d^2y, d^2z mit den pag. 13 gefundenen, so erkennen wir, dass dieselben nur in den letzten Gliedern der rechten Seite sich von einander unterscheiden. Es wäre daher noch zu zeigen, dass:

$$(d^2x) = C\xi; \; (d^2y) = C\eta; \; (d^2z) = C\zeta$$

ist.

Zum Zwecke dieses Nachweises schieben wir folgende Hülfsbetrachtung ein.

Legen wir im Punkte 0 der Curve l denjenigen Schenkel der Tangente an dieselbe, welcher in der Richtung AB sich erstreckt (Fig. 1). Die Richtungscosinus seien a, b, c; dann ist bekanntlich:

$$a = \frac{dx}{ds}; \; b = \frac{dy}{ds}; \; c = \frac{dz}{ds};$$

$$da = \left(\frac{d^2x}{ds}\right); \; db = \left(\frac{d^2y}{ds}\right); \; dc = \left(\frac{d^2z}{ds}\right) (\alpha).$$

Welches ist nun die Bedeutung von da, db, dc?

da ist die Zunahme von a, welche sich zeigt, wenn wir von 0 nach einem unendlich benachbarten Punkte 0_1 gehen und in

ihm eine Tangente an die Curve l legen. Sei nun der Punkt 0 der Ursprung eines dem ursprünglichen parallelen Coordinatensystems und in der Entfernung 1 vom Punkte 0 auf der Tangente ein Punkt p gegeben. Die Coordinaten desselben sind a, b, c. Wird die Tangente in der oben angegebenen Weise unendlich wenig gedreht, so verschiebt sich der Punkt p in einer durch da, db, dc bestimmten Richtung. Dies ist aber die Richtung der im Punkte 0 errichteten Hauptnormale H zur Curve l, deren Richtungscosinus α, β, γ heissen mögen. Bezeichnen wir noch den Winkel, welchen die beiden in den unendlich benachbarten Punkten 0 und 0_1 mit einander bilden, mit ε (Contingenzwinkel), den Krümmungsradius der Curve im Punkte 0 mit ϱ, dann ist, wie die Theorie der Gauss'schen Kugel zeigt:

$$\alpha = \frac{da}{d\varepsilon};\ \beta = \frac{db}{d\varepsilon};\ \gamma = \frac{dc}{d\varepsilon};\ \varrho = \frac{ds}{d\varepsilon}.$$

Hieraus:

$$\frac{\alpha}{\varrho} = \frac{da}{ds};\ \frac{\beta}{\varrho} = \frac{db}{ds};\ \frac{\gamma}{\varrho} = \frac{dc}{ds}.$$

Somit:

$$(\beta) \qquad da = \frac{\alpha}{\varrho} ds;\ db = \frac{\beta}{\varrho} ds;\ dc = \frac{\gamma}{\varrho} ds.$$

Stellen wir nun die Forderung, die Curve l soll eine kürzeste Linie sein, so hat dies bekanntlich zur Folge, dass

$$\alpha = \pm\xi;\ \beta = \pm\eta;\ \gamma = \pm\zeta$$

sein muss, wo dem doppelten Vorzeichen eine ganz bestimmte geometrische Bedeutung zu Grunde liegt.

ξ, η, ζ bedeuten hierbei wieder die Richtungscosinus der im Punkte 0 errichteten Normalen zur Oberfläche. — Welches von den beiden Vorzeichen wir an dieser Stelle zu wählen haben, darüber endgültig zu entscheiden, ist, wie das Folgende lehren wird, nutzlos. Wir wählen der Bequemlichkeit halber das positive Vorzeichen und setzen:

$$\alpha = \xi;\ \beta = \eta;\ \gamma = \zeta.$$

Durch Verbindung der Gleichungen α, β und γ erhalten wir:

$$(d^2x) = \frac{\xi}{\varrho} ds^2;\ (d^2y) = \frac{\eta}{\varrho} ds^2;\ (d^2z) = \frac{\zeta}{\varrho} ds^2.$$

Multipliciren wir diese Gleichungen resp. mit ξ, η, ζ und addiren, so finden wir:

$$\xi \,.\, (d^2x) + \eta \,.\, (d^2y) + \zeta \,.\, (d^2z) = \Sigma\xi \,.\, (d^2x) = \frac{ds^2}{\varrho} = C \text{ (Gl. 2 u. 4).}$$

Die Gleichungen (η) gestalten sich hierdurch folgendermassen:

$$(d^2x) = C\xi;\ (d^2y) = C\eta;\ (d^2z) = C\zeta;$$

Hiermit ist der pag. 19 geforderte Nachweis geliefert. Die Gleichungen, welche wir pag. 19 verlassen haben, erhalten somit die Form:

$$\left.\begin{aligned} d^2x &= A\frac{\partial x}{\partial p} + B\frac{\partial x}{\partial q} + C\xi; \\ d^2y &= A\frac{\partial y}{\partial p} + B\frac{\partial y}{\partial q} + C\eta; \\ d^2z &= A\frac{\partial z}{\partial p} + B\frac{\partial z}{\partial q} + C\zeta; \end{aligned}\right\} \quad \text{Vergleiche die Gleichungen } \mathbf{I.}$$

Die zweite Methode, welche wir angewandt haben, um die Richtigkeit der unter (I) gefundenen Werthe für d^2x, d^2y, d^2z gewissermassen zu verificiren, hat im Laufe ihrer Entwicklung uns einen bemerkenswerthen Aufschluss über die pag. 12 eingeführten Unbekannten gegeben, indem wir fanden, dass

$$A = -\,d^2p;\ B = -\,d^2q;\ C = \frac{ds^2}{\varrho}.$$

Setzen wir in den Ausdruck für d^2x die Werthe von A, B, C (Gl. I^a) und vergleichen die rechte Seite desselben mit dem Ausdrucke für das vollständige Differential d^2x:

$$d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial p^2}\,dp^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q}\,dpdq + \frac{\partial^2 x}{\partial q^2}\,dq^2,$$

so erhalten wir durch Gleichsetzung der Coefficienten von dp^2, $dpdq$, dq^2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} &= E_1\frac{\partial x}{\partial p} + E_2\frac{\partial x}{\partial q} + E\xi; \\ \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} &= F_1\frac{\partial x}{\partial p} + F_2\frac{\partial x}{\partial q} + F\xi; \\ \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} &= G_1\frac{\partial x}{\partial p} + G_2\frac{\partial x}{\partial q} + G\xi; \end{aligned}$$

oder in der für uns brauchbareren Form geschrieben:

$$\mathbf{4a}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\partial x}{\partial p}\right) = E_1\dfrac{\partial x}{\partial p} + E_2\dfrac{\partial x}{\partial q} + E\xi; \\ \dfrac{\partial}{\partial q}\left(\dfrac{\partial x}{\partial p}\right) = F_1\dfrac{\partial x}{\partial p} + F_2\dfrac{\partial x}{\partial q} + F\xi; \end{cases}$$

$$\mathbf{4b}\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial q}\left(\dfrac{\partial x}{\partial q}\right) = G_1\dfrac{\partial x}{\partial p} + G_2\dfrac{\partial x}{\partial q} + G\xi; \\ \dfrac{\partial}{\partial p}\left(\dfrac{\partial x}{\partial q}\right) = F_1\dfrac{\partial x}{\partial p} + F_2\dfrac{\partial x}{\partial q} + F\xi. \end{cases}$$ [1]

Vertauschen wir x und ξ einmal resp. mit y und η, dann mit z und ζ, so ergeben sich die entsprechenden Ausdrücke für die partiellen zweiten Derivirten von y und z.

Der Nutzen dieser Gleichungen wird erst später klar werden. Mit ihrer Hülfe werden wir die bis jetzt noch unbekannten Richtungscosinus ξ, η, ζ der Normalen zur gesuchten Oberfläche bestimmen. Zu diesem Zwecke müssen wir jedoch untersuchen, ob sich die Derivirten $\dfrac{\partial x}{\partial p}$, $\dfrac{\partial x}{\partial q}$ etc. durch ξ, η, ζ oder deren Derivirten ausdrücken lassen, d. h. ob sich nicht statt der Unbekannten ξ und x im besonderen Falle als einzige Unbekannte ξ in die Gleichungen 4 einführen lasse.

Es wird daher für kurze Zeit uns die Aufgabe beschäftigen, zunächst einmal die Bedeutung der Derivirten $\dfrac{\partial \xi}{\partial p}$, $\dfrac{\partial \xi}{\partial q}$ etc. zu ermitteln und dann deren etwaigen Zusammenhang mit den Derivirten $\dfrac{\partial x}{\partial p}$, $\dfrac{\partial x}{\partial q}$ etc. festzustellen.

---

1. Vergleiche hierzu Enneper: *Math. Annal.*, Bd. II, pag. 589 die Gleichungen 10 und 11.

Ersetzt man in denselben:

1) u, v resp. durch p, q,
2) E, F, G resp. durch e, f, g,
3) A, C, B resp. durch λE, λF, λG,
4) A_0, C_0, B_0 resp. mit $\lambda\xi$, $\lambda\zeta$, $\lambda\eta$,

wo $\lambda = \sqrt{eg - f^2}$ ist (wie dies die Formeln 13 bei Enneper zeigen, da $\cos a = \xi$, $\cos b = \eta$, $\cos c = \zeta$ ist), so werden sich nach einigen Reduktionen unsre Gleichungen ergeben.

Ehe wir jedoch uns hierzu wenden, leiten wir aus den pag. 14 gefundenen Gleichungen:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d^2x = Ae + Bf;$$
$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d^2x = Af + Bg;$$

für eine spätere Anwendung einige sehr wichtige Formeln ab.

Ersetzen wir in diesen Gleichungen $\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d^2x$ $\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d^2x$, A, B durch die (pag. 12 Gl. 2 und pag. 13 Gl. I^a) gegebenen Werthe, dann ist:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p} dp^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q} dpdq + \left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q}\right) dq^2 = (E_1 e + E_2 f)\, dp^2 + + 2\,(F_1 e + F_2 f)\, dpdq + (G_1 e + G_2 f)\, dq^2;$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}\right) dp^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p} dpdq + \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q} dq^2 = (E_1 f + E_2 g)\, dp^2 + + 2\,(F_1 f + F_2 g)\, dpdq + (G_1 f + G_2 g)\, dq^2.$$

Diese Gleichungen involviren vermöge der Eigenschaft, dass sie nach dp^2, $dpdq$, dq^2 identisch sind, folgende sechs von einander unabhängige Gleichungen:

$$\mathbf{II}\quad \begin{cases} 1)\ E_1 e + E_2 f = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial p}; \\ 2)\ F_1 e + F_2 f = \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}; \\ 3)\ G_1 e + G_2 f = \frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}; \\ 4)\ E_1 f + E_2 g = \frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}; \\ 5)\ F_1 f + F_2 g = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}; \\ 6)\ G_1 f + G_2 g = \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial q}. \end{cases}$$

Aus (4) und (2) einerseits und aus (3) und (5) andererseits ergeben sich noch folgende 2 Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} 7)\ \frac{\partial f}{\partial p} &= E_1 f + E_2 g + F_1 e + F_2 f; \\ 8)\ \frac{\partial f}{\partial q} &= F_1 f + F_2 g + G_1 e + G_2 f. \end{aligned}\right\} \quad \text{II}$$

---

§ 3. Untersuchung, betreffend die Derivirten von ξ, η, ζ.

Auf einer krummen Oberfläche (Fig. 2) S sei ein Punkt 0 (x, y, z) od. (p, q) angenommen und in demselben die Normale **N** mit den Richtungscosinus ξ, η, ζ errichtet. In unendlicher Nähe beim Punkte 0 liege ein zweiter Punkt 0_1 mit den Coordinaten: $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ und $p + dp$, $q + dq$. Von diesem Punkte aus ziehen wir

1) eine Parallele **N′** zur Normale **N**;
2) errichten wir in demselben die Normale $\mathbf{N}_1$ zur Oberfläche, deren Richtungscosinus dann $\xi + d\xi$, $\eta + d\eta$, $\zeta + d\zeta$ sind.

Dieselbe wird im Allgemeinen nicht in der Ebene der Parallelen **N** und **N′** verlaufen, sondern aus derselben irgendwo heraustreten. Zu der Normalen $\mathbf{N}_1$ legen wir weiter durch den Punkt 0 die Parallele $\mathbf{N}'_1$, deren Richtungscosinus jedenfalls dieselben sind, wie die der Normalen $\mathbf{N}_1$. Nehmen wir nun auf der Normalen **N** in der Entfernung 1 vom Punkte 0 einen Punkt ν an, dessen Coordinaten, wie leicht zu erkennen, $x + \xi$, $y + \eta$, $z + \zeta$ sind, und drehen dieselbe so lange, bis sie in die Lage von $\mathbf{N}'_1$ kommt, so hat dies zur Folge, dass der Punkt ν in die Lage ν'_1 übergeht. Da bei dieser Drehung die Strecke 0ν = der Einheit constant geblieben ist, so ist auch die Strecke $0\nu'_1$ = der Einheit; demzufolge hat der Punkt ν'_1 die Coordinaten: $x + \xi + d\xi$, $y + \eta + d\eta$, $z + \zeta + d\zeta$. Wir können daher den Weg $\nu\nu'_1$, welchen der Punkt ν bei dieser Drehung zurückgelegt hat, aus den Componenten $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ uns entstanden denken.

Es ist sofort ersichtlich, dass dieser Weg $\nu\nu'_1$ senkrecht steht zur Normalen **N**; denn:

1) ist $\nu\nu'_1$ Bogen eines um den Punkt 0 mit dem Radius 1 geschlagenen Kreises;
2) besteht die Relation:

$$\xi d\xi + \eta d\eta + \zeta d\zeta = 0,$$

d. h. die Länge der Projektion des Weges $\nu\nu'_1$ auf die Normale **N** ist gleich Null.

Daraus folgt, dass $\nu\nu'_1$ parallel sein muss zu einem vom Punkte 0 ausgehenden Linienelemente, etwa 00_2. (Fig. 3.)

Wenn wir also irgendwo, wo es auch sein mag, den Punkt 0_1 wählen, so gibt es neben dem Linienelement 00_1 immer noch ein zweites Linienelement 00_2, das die Eigenschaft hat zu ν'_1 parallel zu sein, d. h. die Componenten der beiden Wege $\nu\nu'_1$ und 00_2 bestimmen dieselbe Richtung, müssen daher proportional sein. Wenn wir demnach mit $p + \Delta p$, $q + \Delta q$ die Oberflächencoordinaten, mit $x + \Delta x$, $y + \Delta y$, $z + \Delta z$ die Cartesianischen Coordinaten des Punktes 0_2 bezeichnen, so finden folgende Verhältnisse statt:

$$d\xi : \Delta x = d\eta : \Delta y = d\zeta : \Delta z.$$

Bezeichnen wir den Werth derselben mit λ, so ist:

$$d\xi = \lambda . \Delta x;\ d\eta = \lambda . \Delta y;\ d\zeta = \lambda . \Delta z \text{ oder:}$$

$$\mathbf{5}\quad \begin{cases} d\xi = \lambda \left(\dfrac{\partial x}{\partial p} \Delta p + \dfrac{\partial x}{\partial q} \Delta q \right); \\ d\eta = \lambda \left(\dfrac{\partial y}{\partial p} \Delta p + \dfrac{\partial y}{\partial q} \Delta q \right); \\ d\zeta = \lambda \left(\dfrac{\partial z}{\partial p} \Delta p + \dfrac{\partial z}{\partial q} \Delta q \right). \end{cases}$$

Multipliciren wir diese 3 Gleichungen einmal nach der Reihe mit $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$ und addiren in beiden Fällen, so erhalten wir:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d\xi = \lambda \Delta p \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial p} \right)^2 + \lambda \Delta q \Sigma \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial q};$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} d\xi = \lambda \Delta p \Sigma \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial q} + \lambda \Delta q \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial q} \right)^2.$$

Nun ist:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} d\xi = d\Sigma \frac{\partial x}{\partial p} \xi - \Sigma \xi d \frac{\partial x}{\partial p} = - \Sigma \xi d \frac{\partial x}{\partial p} =$$

$$= - dp \Sigma \xi \frac{\partial^2 x}{\partial p^2} - dq \Sigma \xi \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} = - (E dp + F dq);$$

$$\Sigma \frac{dx}{dq} d\xi = d\Sigma \frac{\partial x}{\partial q} \xi - \Sigma \xi d \frac{\partial x}{\partial q} = - \Sigma \xi d \frac{\partial x}{\partial q} =$$

$$= - dp \Sigma \xi \frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} - dq \Sigma \xi \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = - (F dp + G dq);$$

ferner ist:

$$\lambda \Delta p \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 + \lambda \Delta q \Sigma \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial q} = \lambda (e \Delta p + f \Delta q);$$

$$\lambda \Delta p \Sigma \frac{\partial x}{\partial p} \frac{\partial x}{\partial q} + \lambda \Delta q \Sigma \left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 = \lambda (f \Delta p + g \Delta q).$$

Die obigen Gleichungen lauten jetzt:

$$\left.\begin{aligned} \lambda (e \Delta p + f \Delta q) &= - (E dp + F dq); \\ \lambda (f \Delta p + g \Delta q) &= - (F dp + G dq). \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{6}$$

Hieraus bestimmen wir $\lambda \Delta p$ und $\lambda \Delta q$:

$$\lambda \Delta p (eg - f^2) = f (F dp + G dq) - g (E dp + F dq);$$
$$\lambda \Delta q (eg - f^2) = - g (F dp + G dq) + f (E dp + F dq).$$

Mit Hülfe dieser Werthe von $\lambda \Delta p$ und $\lambda \Delta q$ gehen die Ausdrücke für $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ (Gl. 5) in folgende über:

$$d\xi (eg - f^2) = \left(f \frac{\partial x}{\partial p} - e \frac{\partial x}{\partial q}\right)(F dp + G dq) - \left(g \frac{\partial x}{\partial p} - f \frac{\partial x}{\partial q}\right)(E dp + F dq);$$

$$d\eta (eg - f^2) = \left(f \frac{\partial y}{\partial p} - e \frac{\partial y}{\partial q}\right)(\quad » \quad) - \left(g \frac{\partial y}{\partial p} - f \frac{\partial y}{\partial q}\right)(\quad » \quad);$$

$$d\zeta (eg - f^2) = \left(f \frac{\partial z}{\partial p} - e \frac{\partial z}{\partial q}\right)(\quad » \quad) - \left(g \frac{\partial z}{\partial p} - f \frac{\partial z}{\partial q}\right)(\quad » \quad);$$

für die partiellen Derivirten von ξ, η, ζ finden wir:

$$\mathbf{7} \quad \left.\begin{aligned} 1)\ (eg - f^2) \frac{\partial \xi}{\partial p} &= \left(f \frac{\partial x}{\partial p} - e \frac{\partial x}{\partial q}\right) F - \left(g \frac{\partial x}{\partial p} - f \frac{\partial x}{\partial q}\right) E; \\ 2)\ (eg - f^2) \frac{\partial \xi}{\partial q} &= \left(\quad » \quad\right) G - \left(\quad » \quad\right) F; \end{aligned}\right\}$$ [1]

1. Dies sind die beiden ersten Gleichungen 16 bei Enneper, wie sich dies mit Hülfe der in der Anmerkung zu den Gleichungen 4a und 4b und mit Hülfe der Enneper'schen Formeln 13 nachweisen lässt. (*Math. Ann.*, Bd. 2, pag. 590.)

oder:

$$\textbf{III}_a \qquad \frac{\partial \xi}{\partial p} = \mathfrak{A}_x F - \mathfrak{B}_x E; \; \frac{\partial \xi}{\partial q} = \mathfrak{A}_x G - \mathfrak{B}_x F,$$

worin:

$$\textbf{IV}_a \qquad \mathfrak{A}_x = \frac{f\frac{\partial x}{\partial p} - e\frac{\partial x}{\partial q}}{eg - f^2}; \; \mathfrak{B}_x = \frac{g\frac{\partial x}{\partial p} - f\frac{\partial x}{\partial q}}{eg - f^2};$$

für $\frac{\partial \eta}{\partial p}, \frac{\partial \eta}{\partial q}, \frac{\partial \zeta}{\partial p}, \frac{\partial \zeta}{\partial q}$ erhält man ähnliche Ausdrücke. Mit Hülfe derselben stellen die vollständigen Differentiale von ξ, η, ζ sich in folgender Form dar:

$$\left.\begin{aligned} d\xi &= (\mathfrak{A}_x F - \mathfrak{B}_x E)\, dp + (\mathfrak{A}_x G - \mathfrak{B}_x F)\, dq; \\ d\eta &= (\mathfrak{A}_y F - \mathfrak{B}_y E)\, dp + (\mathfrak{A}_y G - \mathfrak{B}_y F)\, dq; \\ d\zeta &= (\mathfrak{A}_z F - \mathfrak{B}_z E)\, dp + (\mathfrak{A}_z G - \mathfrak{B}_z F)\, dq. \end{aligned}\right\} \quad \textbf{V}_a$$

Kehren wir nun wieder zu den Gleichungen (7) zurück; dieselben erlauben uns in umgekehrter Weise die Derivirten $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial x}{\partial q}$ etc. durch $\frac{\partial \xi}{\partial p}, \frac{\partial \xi}{\partial q}$ etc. auszudrücken. Durch Auflösung genannter Gleichungen nach jenen Derivirten findet man:

$$\frac{\partial x}{\partial p} = \mathfrak{A}_\xi f - \mathfrak{B}_\xi e; \; \frac{\partial x}{\partial q} = \mathfrak{A}_\xi g - \mathfrak{B}_\xi f, \qquad \textbf{III}_b$$

worin:

$$\mathfrak{A}_\xi = \frac{F\frac{\partial \xi}{\partial p} - E\frac{\partial \xi}{\partial q}}{EG - F^2}; \; \mathfrak{B}_\xi = \frac{G\frac{\partial \xi}{\partial p} - F\frac{\partial \xi}{\partial q}}{EG - F^2}. \qquad \textbf{IV}_b$$

Aehnliche Ausdrücke ergeben sich für die entsprechenden Derivirten von y und z.

Es ist hier zu bemerken, dass die Determinante $EG - F^2$ niemals Null werden darf, wenn die letzten Gleichungen einen Sinn behalten sollen. Wie wir später sehen werden, wird dieselbe thatsächlich nicht Null werden, sobald wir gewisse Oberflächen von unserer Untersuchung ausschliessen.

Auf Grund der vorhergegangenen Formeln erhalten wir für dx, dy, dz folgende Ausdrücke:

$$\mathbf{V_b}\quad\begin{cases} dx = (\mathfrak{A}_\xi f - \mathfrak{B}_\xi e)\,dp + (\mathfrak{A}_\xi g - \mathfrak{B}_\xi f)\,dq; \\ dy = (\mathfrak{A}_\eta f - \mathfrak{B}_\eta e)\,dp + (\mathfrak{A}_\eta g - \mathfrak{B}_\eta f)\,dq; \\ dz = (\mathfrak{A}_\zeta f - \mathfrak{B}_\zeta e)\,dp + (\mathfrak{A}_\zeta g - \mathfrak{B}_\zeta f)\,dq. \end{cases}$$

Zwischen den Grössen $\mathfrak{A}_x$, $\mathfrak{B}_x$ und $\mathfrak{A}_\xi$, $\mathfrak{B}_\xi$ lässt sich ein sehr einfacher Zusammenhang nachweisen. Multipliciren wir nämlich einmal die 1. Gleichung (7) mit G, die zweite mit $-F$, dann die 1. mit F, die 2. mit $-E$ und addiren in beiden Fällen, so erhalten wir die folgenden sehr symmetrisch gebauten Gleichungen:

$$(eg - f^2)\left(G\frac{\partial\xi}{\partial p} - F\frac{\partial\xi}{\partial q}\right) = -(EG - F^2)\left(g\frac{\partial x}{\partial p} - f\frac{\partial x}{\partial q}\right);$$

$$(ef - f^2)\left(F\frac{\partial\xi}{\partial p} - E\frac{\partial\xi}{\partial q}\right) = -(EG - F^2)\left(f\frac{\partial x}{\partial p} - e\frac{\partial x}{\partial q}\right),$$

welche unter Hinzuziehung der unter $\mathrm{IV_a}$ und $\mathrm{IV_b}$ gegebenen Abkürzungen sich in der möglichst einfachen Form:

$$\mathfrak{A}_\xi = -\mathfrak{A}_x;$$
$$\mathfrak{B}_\xi = -\mathfrak{B}_x;$$

wiedergeben lassen.

---

§ 4. Aufstellung von Differentialgleichungen zur Bestimmung der Grössen ξ, η, ζ und E, F, G.

Die Gleichungen $\mathrm{III_b}$ des vorigen Paragraphen erlauben uns, die partiellen Derivirten von x, y, z durch die entsprechenden partiellen Derivirten von ξ, η, ζ auszudrücken, so dass die zur Bestimmung von ξ, η, ζ abgeleiteten Gleichungen 4 (pag. 22) folgende Gestalt annehmen:

$$\mathbf{VI_a}\quad\begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial}{\partial p}(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi) = E_1(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi) + E_2(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) + E\xi; \\ 2)\ \dfrac{\partial}{\partial q}(\quad\text{»}\quad) = E_1(\quad\text{»}\quad) + F_2(\quad\text{»}\quad) + F\xi; \end{cases}$$

$$\mathbf{VI_b}\quad\begin{cases} 3)\ \dfrac{\partial}{\partial q}(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) = G_1(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi) + G_2(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) + G\xi; \\ 4)\ \dfrac{\partial}{\partial p}(\quad\text{»}\quad) = F_1(\quad\text{»}\quad) + F_2(\quad\text{»}\quad) + F\xi. \end{cases}$$

Die entsprechenden Gleichungen für η und ζ ergeben sich aus den vorstehenden durch Vertauschung von ξ einmal mit η, dann mit ζ, wie sich überhaupt alle auf η und ζ bezüglichen Resultate aus den jedesmal entsprechenden für ξ durch die ebenerwähnte Vertauschung ableiten lassen.

Wir haben jedoch noch mehr gefunden in dem § 3, nämlich Ausdrücke für die vollständigen ersten Differentiale von x, y, z, z. B.

$$dx = (\mathfrak{A}_\xi f - \mathfrak{B}_\xi e)\, dp + (\mathfrak{A}_\xi g - \mathfrak{B}_\xi f)\, dq.$$

Um nun aus dieser Gleichung x bestimmen zu können, ist erforderlich, dass der Ausdruck zur Rechten ein vollständiges Differential sei. Dass dies thatsächlich der Fall ist, lässt sich auf Grund der Gleichungen VI leicht beweisen. Ziehen wir nämlich die 2. Gleichung VI$_b$ von der 2. Gleichung VI$_a$ ab, so erhalten wir:

$$\frac{\partial}{\partial p}(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi) - \frac{\partial}{\partial q}(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) = 0 \text{ d. h.}$$

$$\frac{\partial}{\partial p}(g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi) = \frac{\partial}{\partial q}(f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi).$$

Dies ist nun offenbar die Bedingung, damit die rechte Seite obiger Gleichung ein vollständiges Differential sei. Die Gleichungen VI machen es also gänzlich überflüssig, der obigen Gleichung eine Integrabilitätsbedingung hinzuzufügen. Wenn wir demnach die Grösse ξ aus den partiellen Differentialgleichungen VI bestimmt haben, dann erlaubt uns die obige Gleichung, x als Funktion von p und q darzustellen.

Es ist jedoch sofort ersichtlich, dass in den Gleichungen VI ausser den Unbekannten ξ noch drei andere Unbekannte E, F, G vorkommen, deren Kenntniss bei der Auflösung genannter Gleichungen nach ξ nothwendig vorausgesetzt werden muss. — Wir werden uns daher im Folgenden noch näher damit beschäftigen.

Damit die Gleichungen VI, welche uns zur Bestimmung der einen Unbekannten ξ dienen, keinen Widerspruch enthalten, müssen zwischen ihnen wieder Bedingungsgleichungen, die wir als Integrabilitätsbedingungen erkennen werden, existiren, die uns jene Gleichungen in einem ganz bestimmten Abhängigkeitsverhältnisse erscheinen lassen. Stellen wir dieselben auf.

In dem vorliegenden Falle haben wir nur nöthig, jene Bedingungen für die Gleichungen VIa zu ermitteln, da wir die entsprechenden Bedingungen für die Gleichungen VIb erhalten, indem wir in den für die Gleichungen VIa gefundenen diejenigen Vertauschungen vornehmen, durch welche man von den Gleichungen VIa zu den Gleichungen VIb gelangt. Diese Vertauschungen sind:

$$F_1 \text{ mit } F_2;\ \mathfrak{A}_\xi \text{ mit } -\mathfrak{B}_\xi;\ e \text{ mit } g;$$
$$E_1 \text{ » } G_2;\ \mathfrak{B}_\xi \text{ » } -\mathfrak{A}_\xi;\ p \text{ » } q;$$
$$E_2 \text{ » } G_1;\ E \text{ » } G;$$

und umgekehrt.

Setzen wir zur Abkürzung:

$$f\mathfrak{A}_\xi - e\mathfrak{B}_\xi = \alpha;$$
$$g\mathfrak{A}_\xi - f\mathfrak{B}_\xi = \beta;$$

dann lauten die Gleichungen VI:

$$\textbf{VIc}\begin{cases} 1)\ \dfrac{\partial x}{\partial p} = \alpha E_1 + \beta E_2 + \xi E; \\ 2)\ \dfrac{\partial \alpha}{\partial q} = \alpha F_1 + \beta F_2 + \xi F; \end{cases}$$

$$\textbf{VId}\begin{cases} 3)\ \dfrac{\partial \beta}{\partial q} = \alpha G_1 + \beta G_2 + \xi G; \\ 4)\ \dfrac{\partial \beta}{\partial p} = \alpha F_1 + \beta F_2 + \xi F. \end{cases}$$ [1]

Differenziren wir die Gleichung (1) nach q, die Gleichung (2) nach p, so müssen offenbar, da die linken Seiten der so erhal-

---

1. Dieselben Gleichungen finden wir bei Enneper (*Math. Ann.*, Bd. II, pag. 590 und 591, die 4 letzten Gleichungen 16) wieder.

Der hierauf bezügliche Nachweis wird geführt auf Grund der Anmerkung pag. 22, der Formeln 3 und der Enneper'schen Formeln 13, durch welche wir vermöge der Formeln IIIb zu folgenden Gleichungen gelangen:

$$\alpha = \sqrt{e}\,.\,\cos a_1;\ \beta = \sqrt{g}\,.\,\cos a_2.$$

Im Uebrigen folgt die Uebereinstimmung erwähnter Formeln schon aus der Ueberlegung, dass unsere Formeln VIc und VId auf dieselbe Weise aus 4a und 4b entstanden sind, wie die Enneper'schen Formeln 16 aus 10 und 11 daselbst.

tenen neuen Gleichungen gleich sind, die rechten Seiten es auch sein:

$$\alpha \frac{\partial E_1}{\partial q} + \beta \frac{\partial E_2}{\partial q} + \xi \frac{\partial E}{\partial q} + E_1 \frac{\partial \alpha}{\partial q} + E_2 \frac{\partial \beta}{\partial q} + E \frac{\partial \xi}{\partial q} = \alpha \frac{\partial F_1}{\partial p} +$$
$$+ \beta \frac{\partial F_2}{\partial p} + \xi \frac{\partial F}{\partial p} + F_1 \frac{\partial \alpha}{\partial p} + F_2 \frac{\partial \beta}{\partial p} + F \frac{\partial \xi}{\partial p};$$

oder:

$$0 = \alpha \left(\frac{\partial E_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial p}\right) + \beta \left(\frac{\partial E_2}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial p}\right) + \xi \left(\frac{\partial E}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p}\right) +$$
$$+ \left(E_1 \frac{\partial \alpha}{\partial q} - F_1 \frac{\partial \alpha}{\partial p} + E_2 \frac{\partial \beta}{\partial q} - F_2 \frac{\partial \beta}{\partial p}\right) + \left(E \frac{\partial \xi}{\partial q} - F \frac{\partial \xi}{\partial p}\right).$$

Der Ausdruck in der dritten Klammer rechts lässt sich mit Hülfe der Gleichungen VIc und VIa leicht umformen. Multipliciren wir die erwähnten Gleichungen nach der Reihe resp. mit $-F_1$, E_1, $+E_2$, $-F_2$ und addiren, so ist:

$$E_1 \frac{\partial \alpha}{\partial q} - F_1 \frac{\partial \alpha}{\partial p} + E_2 \frac{\partial \beta}{\partial q} - F_2 \frac{\partial \beta}{\partial q} = \xi (E_1 F - E F_1 - F F_2 + E_2 G) +$$
$$+ \alpha (E_2 G_1 - F F_2) + \beta (E_1 F_2 - E_2 F_1 + E_2 G_2 - F_2^2).$$

Die letzte Gleichung lautet also:

$$0 = \alpha \left(-\frac{\partial F_1}{\partial p} + \frac{\partial E_1}{\partial q} + E_2 G_1 - F F_2\right) + \beta \left(\frac{\partial E_2}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial p} + E_1 F_2 -\right.$$
$$\left. - E_2 F_1 + E_2 G_2 - F_2^2\right) + \xi \left(\frac{\partial E}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p} - E F_1 + E_1 F - E_2 G +\right.$$
$$\left. + F F_2\right) - F \frac{\partial \xi}{\partial p} + E \frac{\partial \xi}{\partial q}.$$

Offenbar ist: $\alpha = \frac{\partial x}{\partial p}$; $\beta = \frac{\partial x}{\partial q}$.

Denken wir uns zunächst für α und β in der letzten Gleichung resp. $\frac{\partial x}{\partial p}$, $\frac{\partial x}{\partial q}$ gesetzt, dann die entsprechenden Gleichungen für y und z hingeschrieben, dieselben nach der Reihe mit ξ, η, ζ multiplicirt und addirt, so erhalten wir unter Berücksichtigung der Formeln:

$$\Sigma \xi \frac{\partial x}{\partial p} = 0; \; \Sigma \xi \frac{\partial x}{\partial q} = 0;$$
$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1;$$

folgende von ξ, η, ζ und x, y, z und deren Derivirten befreite Gleichung:

$$(\mathbf{A}) \quad \frac{\partial E}{\partial q} - \frac{\partial F}{\partial p} - EF_1 + FE_1 - GE_2 + FF_2 = 0.$$

Diese Gleichung mit der obigen verglichen lässt uns erkennen, dass noch eine zweite von folgender Form besteht:

$$\frac{\partial x}{\partial p}\left(\frac{\partial E_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial p} + E_2G_1 - F_1F_2\right) + \frac{\partial x}{\partial q}\left(\frac{\partial E_2}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial p} - E_2F_1 + \right.$$
$$\left. + E_1F_2 + E_2G_2 - F_2^2\right) - F\frac{\partial \xi}{\partial p} + E\frac{\partial \xi}{\partial q} + 0.$$

Für y und z bestehen folgende Gleichungen:

$$\frac{\partial y}{\partial p}\left(\frac{\partial E_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial p} + E_2G_2 - F_1F_2\right) + \frac{\partial y}{\partial q}\left(\frac{\partial E_2}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial p} - E_2F_1 + \right.$$
$$\left. + E_1F_2 + E_2G_2 - F_2^2\right) - F\frac{\partial \eta}{\partial p} + E\frac{\partial \eta}{\partial q} = 0;$$
$$\frac{\partial z}{\partial p}\left(\frac{\partial E_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial p} + E_2G_2 - F_1F_2\right) + \frac{\partial z}{\partial q}\left(\frac{\partial E_2}{\partial q} - \frac{\partial F_2}{\partial p} - E_2F_1 + \right.$$
$$\left. + E_1F_2 + E_2G_2 - F_2^2\right) - F\frac{\partial \zeta}{\partial p} + E\frac{\partial \zeta}{\partial q} = 0.$$

Wir versuchen diese 3 Gleichungen derart zu combiniren, dass wir zu einer Gleichung gelangen, die wie (A) die Eigenschaft hat, von den Grössen ξ, η, ζ und x, y, z frei zu sein.

Multipliciren wir die 3 Gleichungen beziehungsweise einmal mit $\frac{\partial x}{\partial p}, \frac{\partial y}{\partial p}, \frac{\partial z}{\partial p}$, dann mit $\frac{\partial x}{\partial q}, \frac{\partial y}{\partial q}, \frac{\partial z}{\partial q}$ und addiren in beiden Fällen, so erhalten wir mit Hülfe der bekannten Formeln:

$$\Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial p}\right)^2 = e; \Sigma\frac{\partial x}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} = f; \Sigma\left(\frac{\partial x}{\partial q}\right)^2 = g;$$
$$\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial p} = -\Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = -E;$$
$$\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial p}\frac{\partial x}{\partial q} = \Sigma\frac{\partial \xi}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial p} = -\Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p \partial q} = -F;$$
$$\Sigma\frac{\partial \xi}{\partial q}\frac{\partial x}{\partial q} = -\Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = -G;^{1}$$

1. Vergl. Enneper: Gleichungen 7 (*Math. Ann.*, Bd. II, pag. 588).

folgende beiden Gleichungen:

$$1)\ e\left(\frac{\partial E_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial p} + E_2G_2 - F_1F_2\right) + f\left(\frac{\partial E_2}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial q} - E_2F_1 + \right.$$
$$\left. + E_1E_2 + E_2G_2 - F_2^2\right) = 0;$$
$$2)\ f\left(\frac{\partial E_1}{\partial q} - \frac{\partial F_1}{\partial p} + E_2G_2 - F_1F_2\right) + g\left(\frac{\partial E_2}{\partial p} - \frac{\partial F_2}{\partial q} - E_2F_1 + \right.$$
$$\left. + E_1E_2 + E_2G_2 - F_2^2\right) - (EG - F^2) = 0.$$

Es lässt sich nun zeigen, dass die Gleichung 1 eine identische ist.

Schreiben wir dieselbe in folgender Gestalt:

$$1)\ \left(e\frac{\partial F_1}{\partial p} + f\frac{\partial F_2}{\partial p}\right) - \left(e\frac{\partial E_1}{\partial q} + f\frac{\partial E_2}{\partial q}\right) + fE_2F_1 + eF_1F_2 -$$
$$- eE_2G_1 - fE_1E_2 - fE_2G_2 + fF_2^2 = 0,$$

und formen dieselbe mittelst der Formeln II (pag. 23) um.

Es ist: $e\frac{\partial F_1}{\partial p} + f\frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial(eF_1 + fF_2)}{\partial p} - F_1\frac{\partial e}{\partial p} - F_2\frac{\partial f}{\partial p} =$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial p \partial q} - 2F_1(eE_1 + fE_2) - F_2(fE_1 + gE_2 + eF_1 + fF_2);$$

$$e\frac{\partial E_1}{\partial q} + f\frac{\partial E_2}{\partial q} = \frac{\partial(eE_1 + fE_2)}{\partial q} - E_1\frac{\partial e}{\partial q} - E_2\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial p \partial q} -$$
$$- 2E_1(eF_1 + fF_2) - E_2(eG_1 + fG_2 + fF_1 + gF_2).$$

Auf Grund dieser Umformungen nimmt unsre Gleichung (1) die Form $0 = 0$ an, ist also identisch und hat für unsre Untersuchung keinen Werth.

In ähnlicher Weise formen wir die Gleichung (2) um. Wir schreiben dieselbe:

$$\left(f\frac{\partial F_1}{\partial p} + g\frac{\partial F_2}{\partial p}\right) - \left(f\frac{\partial E_1}{\partial q} + g\frac{\partial E_2}{\partial q}\right) + fF_1F_2 - fE_2G_1 + gE_2F_1 -$$
$$- gE_1F_2 - gE_2G_2 + F_2^2 + EG - F^2 = 0.$$

Mit Benutzung der oben erwähnten Formeln formen sich die Klammerausdrücke in folgender Weise um:

$$f\frac{\partial F_1}{\partial p} + g\frac{\partial F_2}{\partial p} = \frac{\partial(fF_1 + gF_2)}{\partial p} - F_1\frac{\partial f}{\partial p} - F_2\frac{\partial g}{\partial p} = \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} -$$
$$- F_1(fE_1 + gE_2 + eF_1 + fF_2) - 2F_2(fF_1 + gF_2);$$
$$f\frac{\partial E_1}{\partial q} + g\frac{\partial E_2}{\partial q} = \frac{\partial(fE_1 + gE_2)}{\partial q} - E_1\frac{\partial f}{\partial q} - E_2\frac{\partial g}{\partial q} =$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial q^2} - E_1(fF_1 + gF_2 + eG_1 + fG_2) - 2E_2(fG_1 + gG_2).$$

Nach diesen Vorbereitungen erhält die Gleichung (2) die Gestalt:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 e}{\partial q^2} - F_1 (eF_1 + fF_2) + E_1 (eG_1 + fG_2) -$$
$$- F_2 (F_1 f + F_2 g) + E_2 (fG_1 + gG_2) + EG - F_2 = 0;$$

oder:

$$\text{(B)}\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 e}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}(E_1 + F_2) + \frac{1}{2}E_2\frac{\partial g}{\partial q} - \frac{1}{2}F_1\frac{\partial e}{\partial q} +$$
$$+ E_1\frac{\partial f}{\partial q} + EG - F^2 = 0.$$

Die Gleichungen (A) und (B) sind ihrer Herleitung nach nichts anders, als die Integrabilitätsbedingungen zu den Gleichungen VIa (pag. 28); für die Gleichungen VIb (pag. 28) erhalten wir die entsprechenden Integrabilitätsbedingungen, indem wir in den für die Gleichung VIa abgeleiteten die pag. 30 angegebenen Vertauschungen vornehmen:

$$\frac{\partial F}{\partial q} - \frac{\partial G}{\partial p} + F_2 G - F G_2 - E G_1 + F F_1 = 0; \qquad (A_1)$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial p^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}(F_1 + G_2) + \frac{1}{2}G_1\frac{\partial e}{\partial p} - \frac{1}{2}F_2\frac{\partial g}{\partial p} +$$
$$+ G_2\frac{\partial f}{\partial p} + EG - F^2 = 0. \qquad (B_1)$$

Die Gleichungen (B) und (B_1) unterscheiden sich nur in den Ausdrücken der linken Seite:

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}E_1 + \frac{1}{2}E_2\frac{\partial g}{\partial p} + E_1\frac{\partial f}{\partial q} \text{ und } \frac{1}{2}G_1\frac{\partial e}{\partial q} + G_2\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}G_2\frac{\partial e}{\partial q}.$$

Wenn wir jedoch auch hier die Formeln II im Auge behalten, so zeigt sich, dass auch diese Ausdrücke einander gleich sind; denn es ist:

$$\frac{1}{2}E_2\frac{\partial g}{\partial q} + E_1\left(\frac{\partial f}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}\right) = E_2 (G_1 f + G_2 g) + E_1 (eG_1 + fG_2);$$

$$\frac{1}{2}G_1\frac{\partial e}{\partial p} + G_2\left(\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial e}{\partial q}\right) = G_1 (eE_1 + fE_2) + G_2 (fE_1 + gE_2).$$

Durch Subtraktion der beiden Gleichungen von einander ergibt sich:

$$-\frac{1}{2}E_1\frac{\partial g}{\partial p} + \frac{1}{2}E_2\frac{\partial g}{\partial q} + E_1\frac{\partial f}{\partial q} = \frac{1}{2}G_1\frac{\partial e}{\partial p} + G_2\frac{\partial f}{\partial p} - \frac{1}{2}G_2\frac{\partial e}{\partial q}.$$

Diese vollständige Identität der Gleichungen (B) und (B_1) führt zu dem schönen Resultate:

Zu den Differentialgleichungen VI$_a$ und VI$_b$, deren es, entsprechend den Richtungscosinus ξ, η, ζ der Normalen zur gesuchten Oberfläche, eigentlich 12 sind, gehören nur drei Integrabilitätsbedingungen, welche, abgesehen davon, dass sie frei sind von den Coordinaten x, y, z und den Grössen ξ, η, ζ, als einzige Unbekannten die zu Anfang unsrer Untersuchung eingeführten Hülfsgrössen E, F, G enthalten.

Stellen wir diese für uns so wichtigen Gleichungen noch einmal zusammen und wählen von den Gleichungen (B) und (B_1) z. B. die erste, so haben wir:

$$\textbf{VII}\left\{\begin{aligned}
&1)\ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 e}{\partial q^2}-\frac{\partial^2 f}{\partial p\partial q}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}-\frac{1}{2}\frac{\partial g}{\partial p}(E_1+F_2)+\frac{1}{2}E_2\frac{\partial g}{\partial q}-\\
&\quad-\frac{1}{2}F_1\frac{\partial e}{\partial q}+E_1\frac{\partial f}{\partial q}+EG-F^2=0;\ ^1\\
&2)\ \frac{\partial F}{\partial p}-\frac{\partial E}{\partial q}+EF_1-FE_1-GE_2+FF_2=0;\ ^2\\
&3)\ \frac{\partial F}{\partial q}-\frac{\partial G}{\partial p}+GF_2-FG_2-EG_1+FF_1=0.\ ^3
\end{aligned}\right.$$

---

1) Gleichung 19 bei Enneper (*Math. Ann.*, Bd. II, pag. 590), die in unseren Bezeichnungen lautet:

$$\frac{\partial M}{\partial p}+\frac{\partial N}{\partial q}+\frac{\partial^2\psi}{\partial p\partial q}+\frac{EG-f^2}{\lambda}=0,$$

wo:

$$M=\frac{E_1}{g}\lambda;\ N=\frac{F_2}{\lambda}\lambda;$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial p}=-\frac{gE_1+eF_2}{eg}\lambda \text{ und } \lambda=\sqrt{eg-f^2}$$

ist, gemäss den Formeln 3 (pag. 14).

2) 1. Gleichung 12 bei Enneper (l. c. pag. 590):

$$\frac{\partial(\lambda E)}{\partial q}-\frac{\partial(\lambda F)}{\partial p}=\lambda\left\{2EF_1+EG_2-GE_2-FE_1\right\}.$$

Da nun:

$$\frac{\partial(\lambda E)}{\partial q}-\frac{\partial(\lambda F)}{\partial p}=\lambda\left\{\frac{\partial E}{\partial q}-\frac{\partial F}{\partial p}+EF_1+EG_2-FF_2-FE_1\right\}$$

ist, so ergibt sich hieraus unsre Gleichung.

3) 2. Gleichung 12 bei Enneper (l. c. pag. 590). Diese Behauptung bedarf keines Beweises, da die beiden Enneper'schen Gleichungen 12 sich durch die Vertauschungen (pag. 30) in einander überführen lassen, durch welche eben unsre Gleichung 3 aus der Gleichung 2 abgeleitet wird.

§ 5. Schlussresultat.

Ziehen wir aus der bis jetzt geführten Untersuchung das Schlussresultat, so wird dasselbe sich dahin aussprechen lassen, dass die Lösung des Gauss'schen Biegungsproblems sich zurückführen lässt auf die successive Integration dreier Systeme von Differentialgleichungen: VII, VI_a und VI, V_b.

Nachdem man nämlich die Gleichungen VII nach den Grössen *E, F, G* aufgelöst hat, führt man die Werthe derselben in die Gleichungen VI_a und VI_b ein und bestimmt aus diesen den Cosinus ξ des Winkels, welchen die Normale im Punkte 0 der gesuchten Oberfläche mit der x = Axe bildet. Das erreicht man am geeignetsten in folgender Weise: Vorerst bestimmt man mit Hülfe dieser Gleichungen die partiellen 2. Derivirten von ξ und zwar so, dass man zur Bestimmung von $\frac{\partial^2\xi}{\partial p^2}$ und $\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q}$ die Gleichungen (1) und (4), ferner zur abermaligen Bestimmung von $\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q}$ und $\frac{\partial^2\xi}{\partial q^2}$ die Gleichungen (2) und (3) benutzt. Alsdann erscheinen die betreffenden Derivirten als in ξ und den 1. Derivirten lineare und homogene Ausdrücke, durch deren Integration ξ als Funktion von p und q sich bestimmt. Was die beiden Werthe von $\frac{\partial^2\xi}{\partial p\partial q}$ angeht, die man in der angegebenen Weise erhält, so sind sie der Form nach zwar nicht identisch, müssen es aber dennoch sein auf Grund der Integrabilitätsbedingungen.

Hat man nun den Werth von ξ aus den erwähnten Gleichungen berechnet, so sind uns dadurch die Grössen $\mathfrak{A}_\xi$ und $\mathfrak{B}_\xi$ gegeben, und unsre letzte Aufgabe besteht noch darin, aus der Gleichung:

$$dx = (\mathfrak{A}_\xi f - \mathfrak{B}_\xi e)\, dp + (\mathfrak{A}_\xi g - \mathfrak{B}_\xi f)\, dq$$

x zu bestimmen. Dies ist nun leicht möglich vermöge der oben gemachten Bemerkung (§ 4), dass der Ausdruck zur Rechten ein vollständiges Differential ist.

Die Grössen y und z bestimmen sich in derselben Weise aus

den auf sie bezüglichen Gleichungen, die wir der Kürze halber nicht sammt und sonders angeführt haben. Die Ausdrücke, die sich für x, y, z ergeben, sind Funktionen der Variabeln p und q, wie wir dies verlangt. Der hierbei noch auftretende constante Faktor kann ohne weiteres weggelassen werden, da dies nur mit einer Verlegung des Coordinatenursprungs gleichbedeutend ist.

Während unsrer Untersuchung haben wir nun niemals aus dem Auge gelassen, dass bei der Umbiegung der Oberfläche S_0 in eine andere jegliche Dehnung vermieden werden soll; wir sind somit durch die Integration der Gleichungen V_b zu drei Gleichungen von der Form:

$$x = \varphi_1(p,q);$$
$$y = \psi_1(p,q);$$
$$z = \chi_1(p,q)$$

gelangt, welche eine Oberfläche S repräsentiren, die aus S_0 durch Biegung ohne Dehnung hervorgeht. Solcher Oberflächen werden wir unendlich viele erhalten, da wir bei der Bestimmung der Grössen E, F, G von zwei partiellen Differentialgleichungen Gebrauch gemacht haben.

Sobald wir also, von einer bestimmten Oberfläche ausgehend, die Gleichungen VII, VI_a und VI_b, V_b integriren können, werden wir auch alle Oberflächen kennen lernen, die sich aus derselben durch Biegung ohne Dehnung ableiten lassen.

---

§ 6. Bedeutung der Integrabilitätsbedingungen VII.

Pag. 25 gelangten wir durch geometrische Betrachtung zu dem Resultate:

Wo wir auch immer neben dem Punkte o auf der Oberfläche S den unendlich nahen Punkt o_1 annehmen mögen, immer gibt es neben dem Linienelemente oo_1 noch ein zweites Linienelement oo_2, das die Eigenschaft hat, zu ν'_1 parallel zu sein.

Hiervon machen wir eine Anwendung (Fig. 3). Nehmen wir

an, das Linienelement oo_1 liege in einem der beiden durch den Punkt o gehenden Hauptschnitte; dann schneiden sich die beiden in den Punkten o und o_1 errichteten Normalen $\mathbf{N}$ und $\mathbf{N}_1$ im Krümmungscentrum C des Hauptschnittes, d. h. $\mathbf{N}$ und $\mathbf{N}_1$ liegen in derselben Ebene, der Ebene des Hauptschnittes. Ferner wird in dieselbe Ebene auch die durch den Punkt o gehende Parallele zu $\mathbf{N}_1$, nämlich $\mathbf{N}'_1$ fallen müssen. Dies führt zu dem wichtigen Schlusse:

Liegt das Linienelement in einem der beiden durch den Punkt o gehenden Hauptschnitte, so liegt sowohl der unendlich kleine Bogen ν'_1 in der Ebene derselben, als auch das Linienelement oo_2 und zwar fällt oo_2

1) entweder mit oo_1 zusammen, d. h. in die Richtung der wachsenden p, q und x, y, z,
2) oder oo_2 fällt in die Rückwärtsverlängerung von oo_1, d. h. in die Richtung der abnehmenden p, q und x, y, z.

Diesen beiden Möglichkeiten entsprechend, erhalten wir:

1) $\Delta p = dp$; $\Delta q = dq$; $\Delta x = dx$; $\Delta y = dy$; $\Delta z = dz$;

daraus: $d\xi = \lambda dx$; $d\eta = \lambda dy$; $d\zeta = \lambda dz$.

2) $\Delta p = -dp$; $\Delta q = -dq$; $\Delta x = -dx$; $\Delta y = -dy$; $\Delta z = -dz$;

Hieraus: $d\xi = -\lambda dx$; $d\eta = -\lambda dy$; $d\zeta = -\lambda dz$.

Beschäftigen wir uns etwas näher mit dem Proportionalitätsfaktor λ.

Bekanntlich ist:

$$\xi = \frac{a-x}{\varrho}; \quad \eta = \frac{b-y}{\varrho}; \quad \zeta = \frac{c-z}{\varrho}, \quad (\alpha)$$

wenn wir mit a, b, c die Coordinaten des Krümmungsmittelpunktes C, mit ϱ die absolute Länge des Krümmungshalbmessers bezeichnen. Für das folgende möge hier noch die Festsetzung Statt haben, dass ϱ dann positiv zu nehmen ist, wenn der Krümmungshalbmesser nach derselben Seite der Oberfläche hin verläuft, wie die Normale $\mathbf{N}$.

Lassen wir den Punkt o nach o_1 hin rücken, so bleiben die Coordinaten a, b, c des Krümmungsmittelpunktes C und der Krümmungsradius ϱ unverändert, d. h. wenn wir die Formeln (α) differenziren, so ist:

$$d\xi = -\frac{dx}{\varrho};\ d\eta = -\frac{dy}{\varrho};\ d\zeta = -\frac{dz}{\varrho}.$$ [1]

Vergleichen wir diese Werthe für $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ mit den oben gefundenen, so erhalten wir

in dem 1. Falle: $\lambda = -\frac{1}{\varrho}$;

in dem 2. Falle: $\lambda = +\frac{1}{\varrho}$.

Diese beiden entgegengesetzt gleichen Werthe für λ lassen sich mit Hülfe der so eben gemachten Festsetzung leicht erklären. Hier tritt nun der merkwürdige Umstand, der für unsere Untersuchung von grossem Vortheile ist, ein, dass wir nicht nöthig haben, uns für den einen oder andern Werth von λ in bestimmter Weise zu entscheiden. Wir gelangen zu demselben Resultate, mögen wir $\lambda = -\frac{1}{\varrho}$ oder $+\frac{1}{\varrho}$ setzen.

Ziehen wir nämlich die Gleichungen 6 pag. 26 wieder heran und formen dieselben den beiden Möglichkeitsfällen entsprechend um, so erhalten wir im

ersten Falle, in welchem:

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p = dp;\ \Delta q = dq;\ \lambda = -\frac{1}{\varrho}\text{ ist,}\\ &-\frac{1}{\varrho}(edp + fdq) = -(Edp + Fdq);\\ &-\frac{1}{\varrho}(fdp + gdq) = -(Fdp + Gdq);\end{aligned}\right\}\ 8a$$

zweiten Falle, in welchem

$$\left.\begin{aligned} &\Delta p = -dp;\ \Delta q = -dq;\ \lambda = +\frac{1}{\varrho}\text{ ist,}\\ &\frac{1}{\varrho}(-edp - fdq) = -(Edp + Fdq);\\ &\frac{1}{\varrho}(-fdp - gdq) = -(Fdp + Gdq).\end{aligned}\right\}\ 8b$$

Die beiden Systeme von Gleichungen, die wir, ausgehend von den beiden Möglichkeiten bezüglich der Richtung des Linien-

1. Vergl. Weingarten, *Crelle's Journal*, Bd. 62, pag. 162.

elementes oo_2 erhalten haben, unterscheiden sich nicht von einander, so dass es gleichgültig ist, ob wir $\lambda = -\frac{1}{\varrho}$ oder $= +\frac{1}{\varrho}$ setzen, wenn wir nur in entsprechender Weise Δp und Δq richtig wählen.

Zu dieser Behauptung führt uns noch der Umstand, dass wir, ohne uns um die Grösse λ zu kümmern, zu demselben Systeme von Gleichungen gelangen können.

Oben fanden wir:

$$d\xi = -\frac{dx}{\varrho};\ d\eta = -\frac{dy}{\varrho};\ d\zeta = -\frac{dz}{\varrho}.$$

Hieraus lassen sich folgende Gleichungen ableiten:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\, d\xi = -\frac{1}{\varrho} \Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\, dx;$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\, d\xi = -\frac{1}{\varrho} \Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\, dx.$$

Vermöge einer kleinen Rechnung, die wir übergehen wollen, ergibt sich:

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\, d\xi = -Edp - Fdq;$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\, d\xi = -Fdp - Gdq;$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial p}\, dx = edp + fdq;$$

$$\Sigma \frac{\partial x}{\partial q}\, dx = fdp + gdq.$$

Hierdurch lauten die letzten Gleichungen:

$$\left.\begin{aligned} \frac{1}{\varrho}(edp + fdq) &= Edp + Fdq; \\ \frac{1}{\varrho}(fdp + gdq) &= Fdp + Gdq. \end{aligned}\right\} \quad \text{(Vergleiche } 8_a \text{ und } 8_b\text{)}$$

Schreiben wir dieselben in folgender Form:

$$(F - \frac{1}{\varrho} f)\, dp = -(G - \frac{1}{\varrho} g)\, dq;$$

$$(E - \frac{1}{\varrho} e)\, dp = -(F - \frac{1}{\varrho} f)\, dq.$$

Hieraus:

$$\frac{F - \frac{1}{\varrho} f}{E - \frac{1}{\varrho} e} = \frac{G - \frac{1}{\varrho} g}{F - \frac{1}{\varrho} f} \text{ oder:}$$

$$\frac{1}{\varrho^2} - \frac{1}{\varrho} \cdot \frac{gE - 2fF + eG}{eg - f^2} + \frac{EG - F^2}{eg - f^2} = 0.$$

Wenn wir die beiden Wurzeln dieser nach $\frac{1}{\varrho}$ quadratischen Gleichung den beiden Hauptkrümmungsradien ϱ_1 und ϱ_2 entsprechend mit $\frac{1}{\varrho_1}$ und $\frac{1}{\varrho_2}$ bezeichnen, so ist:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = \frac{EG - F^2}{eg - f^2}; \quad \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} = \frac{gE - 2fF + eG}{eg - f^2}.$$ [1]

Von diesen beiden Formeln hat nur die erste für die vorliegende Untersuchung einen Werth. Schreiben wir dieselbe:

$$EG - F^2 = \frac{eg - f^2}{\varrho_1 \varrho_2}$$

und setzen diesen Werth für $EG - F^2$ in die 1. Gleichung VII ein, so ist:

$$\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = -\frac{1}{eg - f^2} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 e}{\partial q^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial p \partial q} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial p} (E_1 + F_2) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} E_2 \frac{\partial g}{\partial q} - \frac{1}{2} F_1 \frac{\partial e}{\partial q} + E_1 \frac{\partial f}{\partial q} \right).$$ [2]

---

1. Der Gauss'sche Ausdruck für $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2} = k$ (*Disquisitiones*, Art. X)

$$k = \frac{DD'' - D'D'}{(AA + BB + CC)^2}$$

lässt sich mit Hülfe der in dem betreffenden Artikel eingeführten Bezeichnungen auf den unsrigen zurückführen.

Es ist leicht die obige quadratische Gleichung für ϱ mittelst der in der Anmerkung zu Seite 22 gegebenen Substitutionen auf die allgemein bekannte Form zurückzuführen.

2. Dies ist die von Gauss (*Disquisitiones*, Art. XI) abgeleitete Formel, aus welcher er im folgenden Artikel (*Theorema*) den berühmten Satz folgert:

Si superficies curva in quamcumque aliam superficiem explicatur, mensura curvaturæ in singulis punctis invariata manet.

Vergleiche hierzu zunächst die Gleichung 9 der in der Einleitung erwähnten Bonnet'schen Abhandlung: *Journal polytechnique*, Bd. 24, pag. 219, die sofort

Der Ausdruck zur Rechten lässt sich vollständig aus dem gegebenen Linienelemente der Oberfläche S_0 berechnen; er wird daher derselbe bleiben müssen für alle Oberflächen S, die aus S_0 durch Biegung ohne Dehnung hervorgehen, d. h. das Produkt der reciproken Krümmungsradien $\frac{1}{\varrho_1 \varrho_2}$, von Gauss das Maass der Krümmung in einem beliebigen Punkte der Oberfläche genannt, bleibt constant, wenn eine Oberfläche S_0 beliebig ohne Dehnung verbogen wird.

Der Inhalt dieses Gauss'schen Satzes ist somit die Bedeutung, welche der ersten der Gleichungen VII zu Grunde liegt.

Bezüglich der beiden andern Gleichungen VII können wir nur sagen, dass sie als Integrabilitätsbedingungen aufzufassen sind.

---

§ 7. Bedeutung der Hülfsgrössen E, F, G.

Wir gehen aus von den Gleichungen 8:

$$\frac{1}{\varrho}(edp + fdq) = Edp + Fdq;$$
$$\frac{1}{\varrho}(fdp + gdq) = Fdp + Gdq.$$

---

nach Ausführung der angedeuteten Differentiationen und einigen Reduktionen die Gestalt der oben erwähnten Gauss'schen Formel annehmen wird. Bonnet deutet diese Formel durch die identische Gleichung: $k = k'$ (Gleichung 10, l. c., pag. 221), wo k als Funktion von p und q, k' als Funktion von p' und q', die Krümmungsmaasse für zwei entsprechende Punkte zweier auf einander abwickelbarer Oberflächen S und S_1 bedeuten.

Auch Minding (*Crelle's Journal*, Bd. 19, pag. 374) hat durch seine Formel 10 den Gauss'schen Satz bewiesen, den er in der Gleichung 19 (pag. 380): $f(p,q) = \varphi(p', q')$ noch einmal ausspricht.

Vergleiche ferner die Enneper'sche Formel 20 (*Math. Ann.*, Bd. II, pag. 591), die auf Grund der Anmerkung zu den Gleichungen VII, pag. 35, mit den unsrigen identisch sein muss.

Minding und Bonnet haben neben der Schlussbedingung $k = k'$ noch zwei andere; dieselben sind aber nicht linear.

Machen wir den Krümmungshalbmessern ρ_1 und ρ_2 entsprechend folgende Festsetzungen:

In der Richtung des einen Hauptschnittes mit dem Krümmungshalbmesser ρ_1 mögen p und q resp. um dp_1 und dq_1, in der Richtung des zweiten Hauptschnittes mit dem Krümmungshalbmesser ρ_2 resp. um dp_2 und dq_2 wachsen. Dadurch ergeben sich die beiden Systeme von Gleichungen:

$$\begin{cases} 1)\ Edp_1 + Fdq_1 = \dfrac{1}{\rho_1}(edp_1 + fdq_1); \\ 2)\ Fdp_1 + Gdq_1 = \dfrac{1}{\rho_1}(fdp_1 + gdq_1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3)\ Edp_2 + Fdq_2 = \dfrac{1}{\rho_2}(edp_2 + fdq_2); \\ 4)\ Fdp_2 + Gdq_2 = \dfrac{1}{\rho_2}(fdp_2 + gdq_2). \end{cases}$$

Aus den Gleichungen (1) und (3) bestimmen wir E und F, aus (2) und (4) F und G:

$$\mathbf{9}\quad \begin{cases} E(dp_1dq_2 - dp_2dq_2) = \dfrac{edp_1 + fdq_1}{\rho_1}dq_2 - \dfrac{edp_2 + fdq_2}{\rho_2}dq_1; \\ F(\quad\ \ \text{»}\quad\ \ ) = -\dfrac{\text{»}}{\text{»}}dp_2 + \dfrac{\text{»}}{\text{»}}dp_1; \\ F(\quad\ \ \text{»}\quad\ \ ) = \dfrac{fdp_1 + gdq_1}{\rho_1}dq_2 - \dfrac{fdp_2 + gdq_2}{\rho_2}dq_1; \\ G(\quad\ \ \text{»}\quad\ \ ) = -\dfrac{\text{»}}{\text{»}}dp_2 - \dfrac{\text{»}}{\text{»}}dp_1. \end{cases}$$

Diese Ausdrücke für E, F, G formen wir mit Hülfe geometrischer Betrachtungen um. (Fig. 4.)

Das Linienelement sei in der Form:

$$ds = \sqrt{edp^2 + 2fdpdq + gdq^2}$$

vorausgesetzt. Bezeichnen wir dann durch $o\lambda_1 = dp\sqrt{e}$ und $o\lambda_2 = dq\sqrt{g}$ diejenigen Linienelemente, welche entstehen, wenn nur eine der Coordinaten p und q des Punktes o sich um ihr Differential ändert, während die andere constant bleibt; dann ist das Linienelement ds die Diagonale eines Elementarparallelogrammes auf der Oberfläche, dessen eines Paar anstossender

Seiten die Linienelemente $o\lambda_1$ und $o\lambda_2$ sind. Der Winkel zwischen diesen Seiten möge ω, der Winkel zwischen $o\lambda_1$ und ds möge θ heissen; dann finden nach einem Satze der Trigonometrie folgende Proportionen statt:

$$\frac{dp\sqrt{e}}{ds} = \frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin(\pi-\omega)} = \frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega};$$

$$\frac{dq\sqrt{g}}{ds} = \frac{\sin\theta}{\sin(\pi-\omega)} = \frac{\sin\theta}{\sin\omega}.$$ [1]

Hieraus:

$$dp = \frac{\sin(\omega-\theta)}{\sin\omega}\frac{ds}{\sqrt{e}};\ dq = \frac{\sin\theta}{\sin\omega\sqrt{g}}\frac{ds}{}.$$

Legen wir durch das Linienelement ds einen Hauptschnitt und nennen den Winkel, welchen das Linienelement $o\lambda_1$ mit demselben bildet θ_1, den Winkel, welchen dasselbe Linienelement mit dem zweiten Hauptschnitte bildet, θ_2, dann ist:

$$\theta_2 = 90^0 + \theta_1;$$

$$\sin\theta_2 = \cos\theta_1;\ \cos\theta_2 = -\sin\theta_1;\ \sin(\omega-\theta_2) = -\cos(\omega-\theta_1).$$

Es wird somit:

$$dp_1 = \frac{\sin(\omega-\theta_1)\,ds}{\sin\omega\sqrt{e}};\ dq_1 = \frac{\sin\theta_1\,ds}{\sin\omega\sqrt{g}};$$

$$dp_2 = -\frac{\cos(\omega-\theta_1)\,ds}{\sin\omega\sqrt{e}};\ dq_2 = \frac{\cos\theta_1\,ds}{\sin\omega\sqrt{g}}.$$

Diese Werthe für dp_1, dp_2, dq_1, dq_2 setzen wir in die Gleichungen 9 ein; hierzu bereiten wir folgendes vor:

$$dp_1dq_2 - dp_2dq_1 = \frac{ds^2}{\sqrt{eg}}\frac{1}{\sin\omega};$$

$$(edp_1 + fdq_2)\,dq_2 = \frac{\cos\theta_1}{\sin^2\omega}\left(e\frac{\sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}} + f\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{g}};$$

$$(edp_2 + fdq_2)\,dq_1 + \frac{\sin\theta_1}{\sin^2\omega}\left(f\frac{\cos\theta_1}{\sqrt{g}} - e\frac{\cos(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{g}};$$

$$-(edp_1+fdq_1)dp_2 = \frac{\cos(\omega-\theta_1)}{\sin^2\omega}\left(e\frac{\sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}} + f\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{e}};$$

---

1. Vergl. Gauss: *Disquis.*, Art. XVII.

$$(edp_2+fdq_2)dp_1=\frac{sin(\omega-\theta_1)}{sin^2\omega}\left(f\frac{cos\,\theta_1}{\sqrt{g}}-e\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{e}};$$

$$(fdp_1+gdq_1)dq_2=\frac{cos\,\theta_1}{sin^2\omega}\left(f\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}+g\frac{sin\,\theta_1}{\sqrt{g}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{g}};$$

$$(fdp_2+gdq_2)dq_1=\frac{sin\,\theta_1}{sin^2\omega}\left(g\frac{cos\,\theta_1}{\sqrt{g}}-f\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{g}};$$

$$-(fdp_1+gdq_1)dp_2=\frac{cos(\omega-\theta_1)}{sin^2\omega}\left(f\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}+g\frac{sin\,\theta_1}{\sqrt{g}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{e}};$$

$$(fdp^2+gdq_2)dp_1=\frac{sin(\omega-\theta_1)}{sin^2\omega}\left(g\frac{cos\,\theta_1}{\sqrt{g}}-f\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}\right)\frac{ds^2}{\sqrt{e}}.$$

Mit Hülfe dieser Formeln nehmen die obigen Gleichungen die Form an:

$$E\frac{sin\omega}{\sqrt{e}}=\frac{cos\theta_1}{\rho_1}\left(e\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}+f\frac{sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right)-\frac{sin\theta_1}{\rho_2}\left(f\frac{cos\theta_1}{\sqrt{g}}-e\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}\right);$$

$$F\frac{sin\omega}{\sqrt{g}}=\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\rho_1}\left(\quad\text{»}\quad\right)+\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\rho_2}\left(\quad\text{»}\quad\right);$$

$$F\frac{sin\omega}{\sqrt{e}}=\frac{cos\theta_1}{\rho_1}\left(f\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}+g\frac{sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right)-\frac{sin\theta_1}{\rho_2}\left(g\frac{cos\theta_1}{\sqrt{g}}-f\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}\right);$$

$$G\frac{sin\omega}{\sqrt{g}}=\frac{cos(\omega-\theta_1)}{\rho_1}\left(\quad\text{»}\quad\right)+\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\rho_2}\left(\quad\text{»}\quad\right).$$

Führen wir jetzt wieder, den Krümmungsradien ρ_1 und ρ_2 entsprechend, die Winkelbezeichnungen θ_1 und θ_2 ein und beobachten, dass

$$\theta_1=\theta_2-90^\circ;\ sin\theta_1=-cos\theta_2,\ cos\theta_1=sin\theta_2;$$
$$cos(\omega-\theta_1)=-sin(\omega-\theta_2);\ sin(\omega-\theta_1)=cos(\omega-\theta_2);$$

dann erhalten wir:

$$E=\frac{cos\theta_1\sqrt{e}}{sin\omega\,\rho_1}\left(e\frac{sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}}+f\frac{sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right)+\frac{cos\theta_2\sqrt{e}}{sin\omega\,\rho_2}\left(e\frac{sin(\omega-\theta_2)}{\sqrt{e}}+\right.$$
$$\left.+f\frac{sin\theta_2}{\sqrt{g}}\right);$$

$$F = \frac{\cos(\omega-\theta_1)\sqrt{g}}{\sin\omega\ \rho_1}\left(e\frac{\sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}} + f\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right) + \frac{\cos(\omega-\theta_2)\sqrt{g}}{\sin\omega\ \rho_2}$$
$$\left(e\frac{\sin(\omega-\theta_2)}{\sqrt{e}} + f\frac{\sin\theta_2}{\sqrt{g}}\right);$$

$$F = \frac{\cos\theta_1\sqrt{e}}{\sin\omega\ \rho_1}\left(f\frac{\sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}} + g\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right) + \frac{\cos\theta_2\sqrt{e}}{\sin\omega\ \rho_2}\left(f\frac{\sin(\omega-\theta_2)}{\sqrt{e}} +\right.$$
$$\left. + g\frac{\sin\theta_2}{\sqrt{g}}\right);$$

$$G = \frac{\cos(\omega-\theta_1)\sqrt{g}}{\sin\omega\ \rho_1}\left(f\frac{\sin(\omega-\theta_1)}{\sqrt{e}} + g\frac{\sin\theta_1}{\sqrt{g}}\right) + \frac{\cos(\omega-\theta_2)\sqrt{g}}{\sin\omega\ \rho_2}$$
$$\left(f\frac{\sin(\omega-\theta_2)}{\sqrt{e}} + g\frac{\sin\theta_2}{\sqrt{g}}\right).$$

Diese Ausdrücke für E, F, G formen wir wieder um. An der Hand der obigen geometrischen Betrachtung gelangen wir zu folgender Formel:

$$ds^2 = edp^2 + gdq^2 + 2\sqrt{eg}\cos\omega\, dpdq.$$

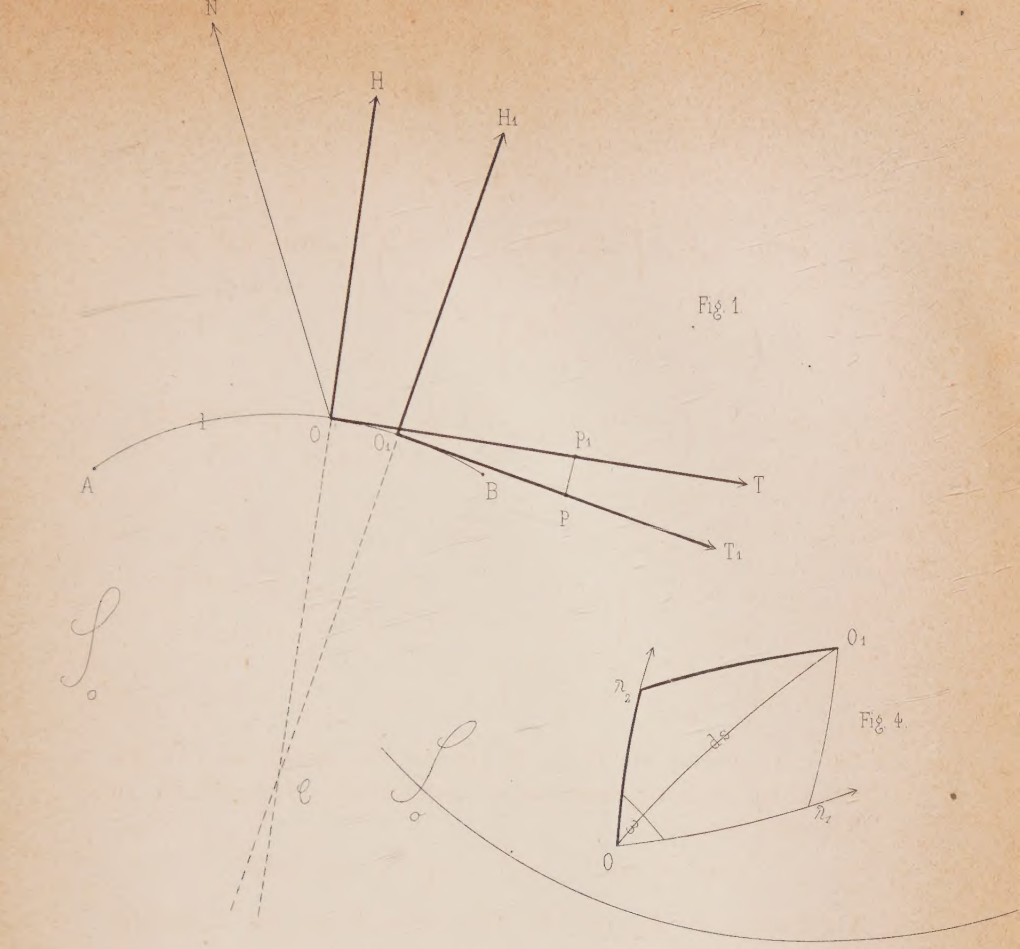
Vergleichen wir hiermit die allgemeine Form des Linienelementes, so folgt:

$$f = \sqrt{eg}\cos\omega.\ ^1$$

Berücksichtigen wir dies in den Ausdrücken für E, F, G, so nehmen dieselben nach einigen Rechnungen folgende Form an:

$$\left.\begin{aligned} E &= e\left(\frac{\cos^2\theta_1}{\rho_1} + \frac{\cos^2\theta_2}{\rho_2}\right) = \Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p^2};\\ F &= \sqrt{eg}\left(\frac{\cos(\omega-\theta_1)\cos\theta_1}{\rho_1} + \frac{\cos(\omega-\theta_2)\cos\theta_2}{\rho_2}\right) = \Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial p\partial q};\\ G &= g\left(\frac{\cos^2(\omega-\theta_1)}{\rho_1} + \frac{\cos^2(\omega-\theta_2)}{\rho_2}\right) = \Sigma\xi\frac{\partial^2 x}{\partial q^2}. \end{aligned}\right\} \mathbf{10}$$

1. Vergl. Gauss: *Disquis.*, Art. XVII.



Lith. R. Schultz & Cie, Strassbourg